1 Ableitungen und Grenzwerte

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}), & \text{falls } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Zeige: Die Funktion ist in der ganzen Ebene differenzierbar.

b) Besitzt f überall *stetige* partielle Ableitungen?

2 Ableitungen I

Berechne alle partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen auf ihrem Definitionsbereich:

a) $f(x,y) = ax^2$;

b) $f(x,y) = e^{xy}$;

c) $f(x,y) = x^y$;

d) $f(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$;

e) $f(x,y) = x^2 y \sin(xy)$;

f) $f(x,y,z) = xy^2z^3 + y$.

3 Ableitungen II

a) Sei $x(t) = \cos(\pi t)$ und $y(t)$ die Stammfunktion von e^{-t^2}, die an der Stelle $t = 1$ den Wert 42 annimmt. Weiterhin sei $f(x,y) = x^2 + y^2$. Berechne die Ableitung der Funktion $t \mapsto f(x(t), y(t))$ im Punkt $t = 1$.

b) Sei

$$f(x,y,z) := \int_{\cos x + \sin y}^{z} e^{tz}\, dt.$$

Berechne $df(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 0)$.

4 Extrema I

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) := x^2 + 2xy - 4x - 2y.$$

a) Bestimmen Sie sowohl den grössten als auch den kleinsten Wert, den die Funktion f auf dem Viereck

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2\}$$

annimmt.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene Σ zur Fläche

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$$

im Punkt $Q := (1, 1, f(1, 1))$.

5 Extrema II

Bestimmen Sie das globale Minimum und globale Maximum der Funktion $f : [0, \pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \sin(x)\sin(y)\sin(x + y).$$

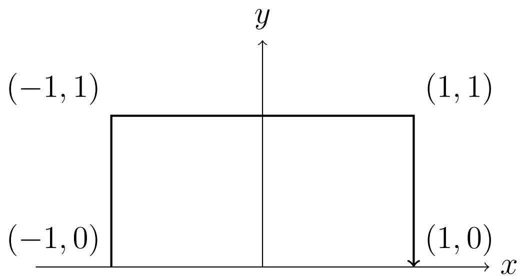
Bestimmen Sie auch die Punkte, wo diese angenommen werden.

6 Linienintegral

Gegeben sei der Streckung γ im $\mathbb{R}^2$ von $(-1, 0)$ über $(-1, 1)$ und $(1, 1)$ nach $(1, 0)$, sowie das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 4xy + 4y^2 \\ -2x^2 + 8xy + 12y^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Linienintegral $\int_\gamma v ds$ auf irgendeine Weise.



7 Potenzial

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$F(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$$

stetig differenzierbar ist. Wir definieren ein Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$v(x, y) = F(x, y)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

a) Beweisen Sie, dass v konservativ ist.

b) Bestimmen Sie ein Potenzial von v.

8 Der Satz von Green

Die Piriform Kurve C in $\mathbb{R}^2$ ist die Teilmenge

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3(2 - x)\}.$$

Eine Parametrisierung von C ist durch $\gamma : [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 + \sin(t) \\ \cos(t)(1 + \sin(t)) \end{pmatrix}$$

gegeben. Die Piriform Kurve ist der Rand von der Menge

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2 \text{ und } -\sqrt{x^3(2 - x)} \leq y \leq \sqrt{x^3(2 - x)}\}.$$

Bestimmen Sie mittels des Satzes von Green die Fläche von Ω.

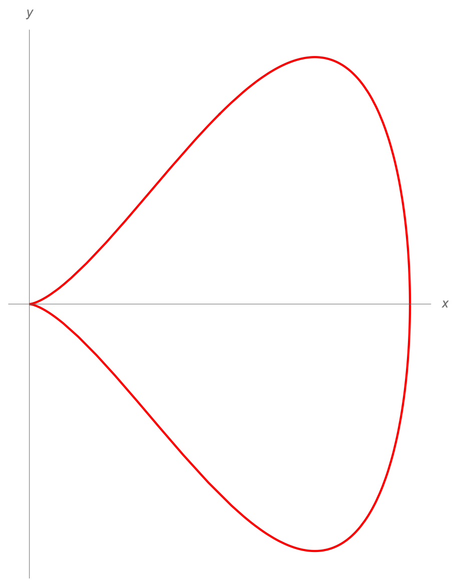


Abbildung 1: Die Piriform Kurve

9 Geometrie

Wir betrachten den Graphen $\mathcal{G} = \{(x, y, f(x, y)) : x, y \in \mathbb{R}\}$ der Funktion

$$f(x, y) = e^{-(x^2+y^2-2x+3y+2)}.$$

a) Parametrisiere die Kurven γ_1 und γ_2 die entstehen, wenn wir $\mathcal{G}$ mit den Koordinatenebenen $\{y = 0\}$ bzw. $\{x = 0\}$ schneiden.
Berechne deren Tangentialvektoren im Punkt $(0, 0, z) \in \mathcal{G}$ (was ist z?).

b) Die Tangentialvektoren aus a) spannen eine Ebene durch den Punkt $(0, 0, z)$ auf, die den Graphen von f in diesem Punkt berührt und daher Tangentialebene an den Graphen von f in $(0, 0, z)$ genannt wird.
Bestimme eine Parameterdarstellung und eine Koordinatengleichung dieser Ebene. Vergleiche die Koordinatengleichung mit der durch das Differential gegebenen Formel für die lineare Approximation von f in einer Umgebung von $(0, 0)$.

c) Finde diejenigen Punkte auf dem Graphen von f, in denen die Tangentialebene parallel zur (x, y)–Ebene ist.

d) Zeichne ein qualitativ richtiges Niveaulinienporträt von f zusammen mit dem Gradientenvektorfeld.

10 Integration mittels Substitution

Die Kardioide C ist die Kurve in $\mathbb{R}^2$, die durch

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2 - 2x)^2 = 4(x^2 + y^2)\}$$

definiert ist. C ist der Rand der Menge

$$\Omega := \{(tx, ty) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [0, 1],\ (x, y) \in C\}.$$

Bestimmen Sie die Fläche von Ω mittels Integration in Polarkoordinaten.

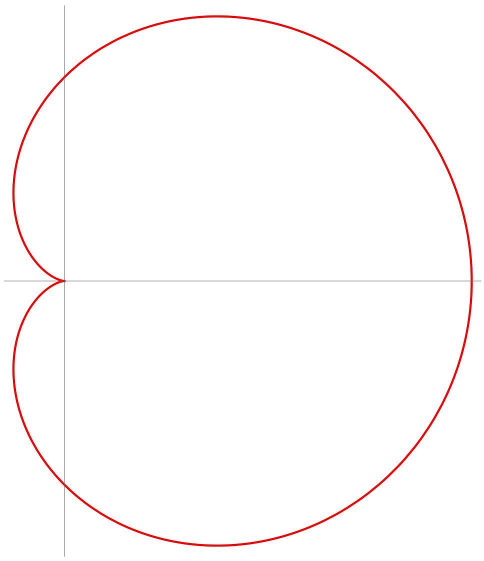


Abbildung 2: Die Kardioide

Eine englische Version dieser Übungsserie finden Sie auf der nächsten Seite

1 Derivatives and limits

Let $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be given by

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}), & \text{falls } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Show that f is differentiable at every point of the plane.

b) Are the partial derivatives of f continuous everywhere?

2 Derivatives I

Compute all partial derivatives of the following functions on the domain on which they are defined:

a) $f(x,y) = ax^2$;

b) $f(x,y) = e^{xy}$;

c) $f(x,y) = x^y$;

d) $f(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$;

e) $f(x,y) = x^2 y \sin(xy)$;

f) $f(x,y,z) = xy^2z^3 + y$.

3 Derivatives II

a) Let $x(t) = \cos(\pi t)$ and let $y(t)$ be the primitive of e^{-t^2} which at the point $t = 1$ equals 42. Moreover, let $f(x,y) = x^2 + y^2$. Compute the derivative of the function $t \mapsto f(x(t), y(t))$ at the point $t = 1$.

b) Let

$$f(x,y,z) := \int_{\cos x + \sin y}^{z} e^{tz}\, dt.$$

Compute $df(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 0)$.

4 Extrema I

The function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is given by

$$f(x,y) := x^2 + 2xy - 4x - 2y.$$

a) Determine the largest as well as the smallest value attained by f on the rectangle

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2\}.$$

b) Determine the equation for the tangent plane Σ of the surface

$$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y)\}$$

at the point $Q := (1, 1, f(1,1))$.

5 Extrema II

Determine the gobal minimum and global maximum of the function $f : [0, \pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \sin(x)\sin(y)\sin(x + y).$$

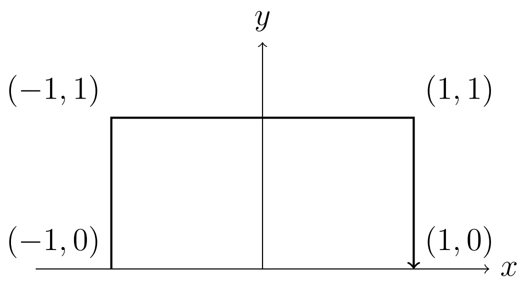
Determine the points where these values are taken.

6 Line integral

Denote by γ the path in $\mathbb{R}^2$ running from $(-1, 0)$ over $(-1, 1)$ and $(1, 1)$ to $(1, 0)$. Denote by $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ the vectorfield given by,

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 4xy + 4y^2 \\ -2x^2 + 8xy + 12y^2 \end{pmatrix}.$$

Compute the line integral $\int_\gamma v ds$.



7 Potential

Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a function such that the function $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$F(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$$

is continuously differentiable. We define a vectorfield $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ via

$$v(x, y) = F(x, y) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

a) Prove that v is conservative.

b) Determine a potential for v.

8 Green's theorem

The Piriform curve C in $\mathbb{R}^2$ is the set

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3(2 - x)\}.$$

A parametrization of C is given by $\gamma : [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 + \sin(t) \\ \cos(t)(1 + \sin(t)) \end{pmatrix}$$

The Piriform curve is the boundary of the set

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2 \text{ und } -\sqrt{x^3(2-x)} \leq y \leq \sqrt{x^3(2-x)}\}.$$

Determine, using Green's theorem, the area of Ω.

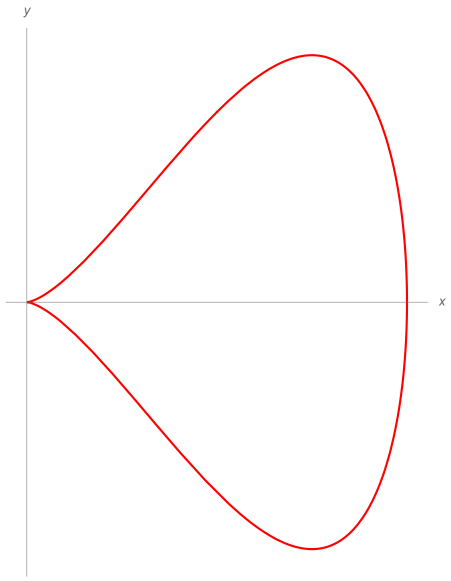


Abbildung 3: The Piriform curve

9 Geometry

We consider the graph $\mathcal{G} = \{(x,y,f(x,y)) : x,y \in \mathbb{R}\}$ of the function

$$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2-2x+3y+2)}.$$

a) Parametrise the curves γ_1 and γ_2 which occur when we intersect $\mathcal{G}$ with the coordinate planes $\{y=0\}$ and $\{x=0\}$.
Compute their tangent vectors at the point $(0,0,z) \in \mathcal{G}$ (what is z?).

b) The tangent vectors from a) span a plane through the point $(0,0,z)$, which touches the graph of f in this point and which is called the tangent plane of the graph of f in $(0,0,z)$.
Determine a parametrisation and the equation associated to this plane. Compare the coordinate equation with the differential of f at the point $(0,0)$.

c) Determine the points on the graph of f where the tangent plane is parallel the the (x,y)-plane.

d) Draw a qualitative correct levelset portrait of f together with the gradient vector field.

10 Integration by substitution

The cardioid C is the curve in $\mathbb{R}^2$ defined by

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2 - 2x)^2 = 4(x^2 + y^2)\}$$

C is the boundary of the set

$$\Omega := \{(tx, ty) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [0, 1],\ (x, y) \in C\}.$$

Determine the area if Ω using integration in polar coordinates.

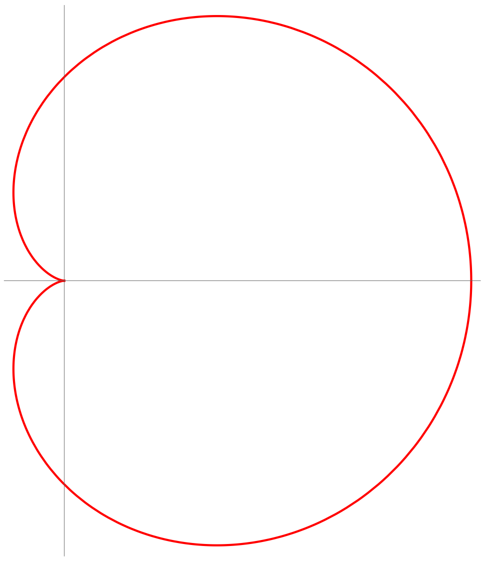


Abbildung 4: The cardioid