1 Ableitungen und Grenzwerte

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}), & \text{falls } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Zeige: Die Funktion ist in der ganzen Ebene differenzierbar.

Lösung:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}), & \text{falls } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Behauptung: f ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ differenzierbar.
Wir berechnen zuerst die partiellen Ableitungen weg vom Ursprung:
Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x \cdot \sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) - (x^2+y^2) \cdot \cos(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) \cdot \frac{2x}{2(\sqrt{x^2+y^2})^3} \\ &= 2x \cdot \sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \cos(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) \end{aligned}$$

und analog

$$f_y(x,y) = 2y \cdot \sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \cos(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}).$$

Damit sind die partiellen Ableitungen stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und die Funktion ist insbesondere differenzierbar in diesem Bereich.
Ausserdem:
Beh.: f ist differenzierbar in $(0,0)$ mit Differential $df(0,0) = (0,0)$.
Beweis:
Es gilt

$$\frac{f(x,y) - f(0,0)}{\|(x,y)\|} = \frac{(x^2+y^2)\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \cdot \sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$$

und damit für $A = (0,0)$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to 0} \frac{|f(x,y) - f(0,0) - A \cdot (x,y)|}{\|(x,y)\|} &= \lim_{(x,y)\to 0} \sqrt{x^2+y^2} \cdot |\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})| \\ &\leq \lim_{(x,y)\to 0} \sqrt{x^2+y^2} = 0 \end{aligned}$$

was zeigt dass f tatsächlich differenzierbar mit Differential $df(0,0) = (0,0)$ wie behauptet.

b) Besitzt f überall *stetige* partielle Ableitungen?

Lösung: Wie bereits in a) bemerkt, sind die partiellen Ableitungen stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Es gilt jedoch
Beh.: Beide partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ sind unstetig in $(0,0)$.
Beweis:
Es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,0) &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2x \cdot \sin(\tfrac{1}{\sqrt{x^2}}) - \frac{x}{\sqrt{x^2}} \cdot \cos(\tfrac{1}{\sqrt{x^2}}) \\ &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2x \cdot \sin(\tfrac{1}{x}) - \cos(\tfrac{1}{x}) = -\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \cos(\tfrac{1}{x})\end{aligned}$$

Dieser Grenzwert existiert jedoch nicht, denn für $x \to 0$ strebt $\frac{1}{x}$ gegen ∞ und die Funktion cos oszilliert zwischen -1 und 1. Daraus folgt, dass die Funktion $\frac{\partial f}{\partial x}$ in $(0,0)$ nicht stetig ist.
Analog kann man zeigen, dass der Grenzwert $\lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \frac{\partial f}{\partial y}(0,y)$ nicht existiert.

2 Ableitungen I

Berechne alle partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen auf ihrem Definitionsbereich:

a) $f(x,y) = ax^2$;

b) $f(x,y) = e^{xy}$;

c) $f(x,y) = x^y$;

d) $f(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$;

e) $f(x,y) = x^2 y \sin(xy)$;

f) $f(x,y,z) = xy^2z^3 + y$.

Lösung: Falls nicht anders angegeben, ist der Definitionsbereich der Funktion und der partiellen Ableitungen jeweils $\mathbb{R}^2$ (bzw. $\mathbb{R}^3$ in f))

a) $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 2ax, \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 0$

b) $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = ye^{xy}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = xe^{xy}$

c) Definiert für $x > 0$ und beliebige y, d.h. $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = yx^{y-1}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} e^{y \log x} = \log x e^{y \ln x} = x^y \ln x$$

d) $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{(x^2+y^2)-(x-y)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2+2xy}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{-(x^2+y^2)-(x-y)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

e) $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 2xy\sin(xy) + x^2y^2\cos(xy)$,
$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = x^2\sin(xy) + x^3y\cos(xy)$

f) $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) = y^2z^3$, $\quad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) = 2xyz^3 + 1$, $\quad \frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) = 3xy^2z^2$

3 Geometrie

Wir betrachten den Graphen $\mathcal{G} = \{(x,y,f(x,y)) : x,y \in \mathbb{R}\}$ der Funktion

$$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2-2x+3y+2)}.$$

a) Parametrisiere die Kurven γ_1 und γ_2 die entstehen, wenn wir $\mathcal{G}$ mit den Koordinatenebenen $\{y = 0\}$ bzw. $\{x = 0\}$ schneiden.
Berechne deren Tangentialvektoren im Punkt $(0,0,z) \in \mathcal{G}$ (was ist z?).

Lösung: Die Punkte (x,y,z) in $\mathcal{G}$ sind bestimmt durch die Gleichung $z = f(x,y)$. Damit ist der Schnitt des Graphen mit der xz-Ebene

$$\mathcal{G} \cap \{y = 0\} = \{(x,0,z) : z = f(x,0)\}$$

und wir können diese Kurve parametrisieren durch

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ f(t,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ e^{-t^2-2t+2} \end{pmatrix}.$$

Analog parametrisiert

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ f(0,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ e^{-t^2+3t+2} \end{pmatrix}$$

die Schnittkurve $\mathcal{G} \cap \{x = 0\}$ des Graphen mit der yz-Ebene.

Wir besimmen nun die Tangentialvektoren in $(0,0,z)$.
Weil $(0,0,z) \in \mathcal{G}$ gilt $z = f(0,0) = e^{-2}$. Ausserdem gilt $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = (0,0,e^{-2})$, so dass wir die Ableitung (=Tangentialvektor an Kurve) der beiden Kurven in $t = 0$ berechnen müssen.
Es gilt

$$\dot\gamma_1(0) = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ f(t,0) \end{pmatrix}\Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2e^{-2} \end{pmatrix},$$

denn

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (-2x+2)\cdot e^{-(x^2+y^2-2x+3y+2)} = (-2x+2)\cdot f(x,y).$$

Ausserdem ist

$$\dot\gamma_2(0) = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ f(t,0) \end{pmatrix}\Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3e^{-2} \end{pmatrix}.$$

wobei wir die partielle Ableitung nach y,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (-2y-3)\cdot e^{-(x^2+y^2-2x+3y+2)} = (-2y-3)\cdot f(x,y)$$

benutzt haben.

b) Die Tangentialvektoren aus a) spannen eine Ebene durch den Punkt $(0,0,z)$ auf, die den Graphen von f in diesem Punkt berührt und daher Tangentialebene an den Graphen von f in $(0,0,z)$ genannt wird.
Bestimme eine Parameterdarstellung und eine Koordinatengleichung dieser Ebene. Vergleiche die Koordinatengleichung mit der durch das Differential gegebenen Formel für die lineare Approximation von f in einer Umgebung von $(0,0)$.

Lösung: Da die Vektoren $\vec{v}_1 = \dot{\gamma}_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2e^{-2} \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \dot{\gamma}_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3e^{-2} \end{pmatrix}$ in der Tangentialebene liegen und diese Ebene durch den Punkt $(0,0,e^{-2})$ verläuft ist eine Parametergleichung gegeben durch

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-2} \end{pmatrix} + s\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2e^{-2} \end{pmatrix} + t\cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3e^{-2} \end{pmatrix}, s,t\in\mathbb{R}.$$

Zum Bestimmen der Koordinatengleichung berechnen wir den Normalenvektor

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2e^{-2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3e^{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-2} \\ 3e^{-2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Koordinatengleichung hat also die Form

$$-2e^{-2}x + 3e^{-2}y + z + d = 0$$

und wir können d bestimmen durch einsetzen von $(0,0,e^{-2})$ (liegt auf der Ebene) als $d = -e^{-2}$.
D.h. die Ebenengleichung lautet

$$-2e^{-2}x + 3e^{-2}y + z - e^{-2} = 0$$

Die durch das Differential gegebene lineare Näherung an die Funktion ist gegeben durch

$$l(x,y) = f(0,0) + df(0,0)\cdot(x,y)$$

mit der Eigenschaft, dass (Definition von df!)

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{f(x,y) - l(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0.$$

In unserem Fall ergibt sich also

$$l(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot y = e^{-2} + 2e^{-2}x - 3e^{-2}y.$$

Ein Vergleich mit der Koordinatengleichung zeigt, dass die Tangentialebene genau durch die Bedingung $z = l(x,y)$ bestimmt ist, die Tangentialebene also der Graph der linearen Näherung l ist.

c) Finde diejenigen Punkte auf dem Graphen von f, in denen die Tangentialebene parallel zur (x, y)–Ebene ist.

Lösung: Analog zu Teil a) und b) können wir zu jedem Punkt (x_0, y_0, z_0) die Schnittkurven mit den Ebenen $\{x = x_0\}$ und $\{y = y_0\}$ parametrisieren und die entsprechenden Tangentialvektoren bestimmen. Es ist dann

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ y_0 \\ f(t, y_0) \end{pmatrix}, \quad \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ t \\ f(x_0, t) \end{pmatrix}$$

mit den entsprechenden Tangentialvektoren (beachte $\gamma_1(x_0) = (x_0, y_0, z_0) = \gamma_2(y_0)$

$$v_1 = \dot{\gamma}_1(x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \quad v_1 = \dot{\gamma}_2(y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Die Tangentialebene ist genau dann parallel zur xy Ebene, wenn beide Vektoren parallel zur xy-Ebene sind, d.h. falls

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \qquad \text{und} \qquad f_y(x_0, y_0) = 0\,.$$

Da $f(x, y) > 0$ für alle x und y und $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (-2x + 2) \cdot f(x, y)$ sowie $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)(-2y - 3) \cdot f(x, y)$, ist dies genau dann der Fall, wenn $(x, y) = \left(1, -\frac{3}{2}\right)$. In diesem Punkt gilt dann $f(1, -3/2) = e^{5/4}$. Der Punkt $(1, -\frac{3}{2}, e^{5/4})$ ist also der einzige Punkt mit horizontaler Tangentialebene. (Es ist übrigens das Maximum der Funktion)

d) Zeichne ein qualitativ richtiges Niveaulinienporträt von f zusammen mit dem Gradientenvektorfeld.

Lösung: Die Niveaulinie zum Niveau c ist nach Definition die Menge

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}$$

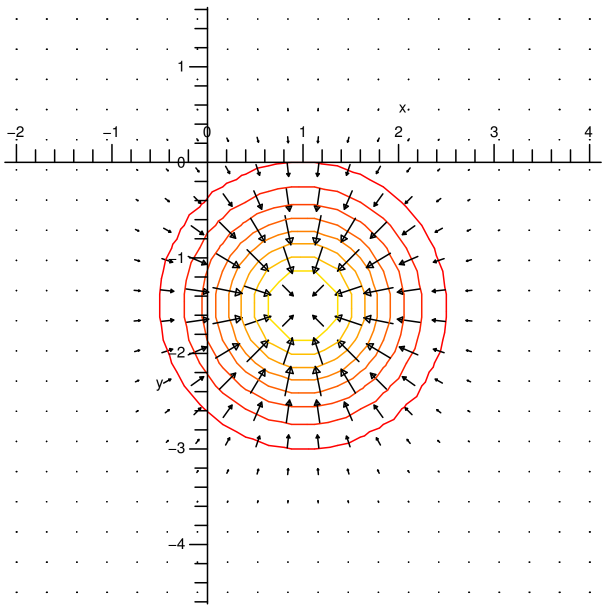
also diejenigen Punkte im $\mathbb{R}^2$ deren Funktionswert c ist (und damit der entsprechende Punkt auf dem Graphen auf dem Niveau c liegt). Da die Funktion immer positiv ist, sind die Niveaulinien für $c \leq 0$ die leere Menge.
Für $c > 0$ schreiben wir $c = e^a$ und rechnen:

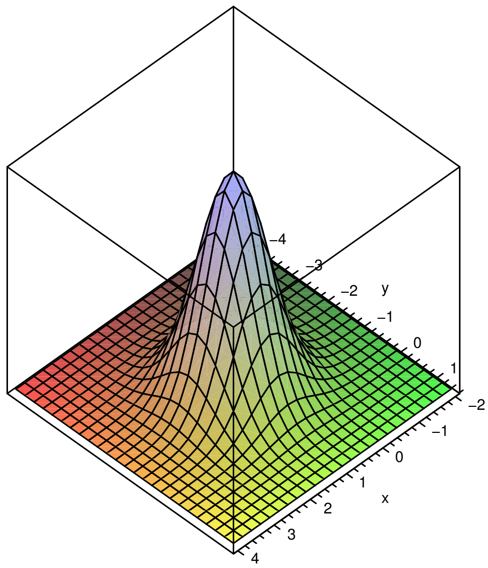
$$\begin{aligned} e^a &= f(x, y) = e^{-(x^2+y^2-2x+3y+2)} \\ \Leftrightarrow -a &= x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2 = (x-1)^2 + (y + \frac{3}{2})^2 - 1 - \frac{9}{4} + 2 \end{aligned}$$

Die Niveaulinien sind also Kreise um den Punkt $(1, -\frac{3}{2})$ mit einem Radius der von a abhängt (konkret $r = \sqrt{\frac{5}{4} - a}, \quad a \leq \frac{5}{4}$).
Für den Gradienten sehen wir, dass

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix} = 2f(x, y) \cdot \begin{pmatrix} 1 - x \\ -\frac{3}{2} - y \end{pmatrix}$$

d.h. der Gradient in Richtung des Vektors von (x,y) zum Mittelpunkt $(1,-\frac{2}{3})$ der obigen Kreise. In jedem Punkt steht der Gradient senkrecht auf der Niveaulinie (das ist übrigens immer so (Wieso?) und kann benutzt werden um den Gradienten zu zeichnen, wenn man die Niveaulinien kennt!), Wir erhalten folgendes Bild Der Graph von f sieht folgendermassen aus:





4 Ableitungen II

a) Sei $x(t) = \cos(\pi t)$ und $y(t)$ die Stammfunktion von e^{-t^2}, die an der Stelle $t = 1$ den Wert 42 annimmt. Weiterhin sei $f(x,y) = x^2 + y^2$. Berechne die Ableitung der Funktion $t \mapsto f(x(t), y(t))$ im Punkt $t = 1$.

Lösung: Die verallgemeinerte Kettenregel liefert

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} f\left(x(t), y(t)\right) &= df\left(x(t), y(t)\right) \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot y'(t).\end{aligned}$$

Es gilt für $x(t) = \sin(\pi t)$, dass $x'(t) = \pi \cdot \cos(\pi t)$ und da $y(t)$ eine Stammfunktion von e^{-t^2} ist, gilt $y'(t) = e^{-t^2}$. Wir erhalten also (beachte dass $y(1)$ in Aufgabenstellung gegeben ist)

$$x(1) = \sin(\pi) = 0, \quad x'(t) = cos(\pi) = -1, \quad y(1) = 42, \quad y'(1) = e^{-1}$$

und damit .

$$\frac{d}{dt}\left(f\left(x(t), y(t)\right)\right)\Big|_{t=1} = -2\pi \underbrace{\sin(\pi)}_{0} \cos(\pi) + 2\underbrace{y(1)}_{42} \cdot e^{-1^2} = \frac{84}{e}\ .$$

b) Sei

$$f(x, y, z) := \int_{\cos x + \sin y}^{z} e^{tz}\, dt.$$

Berechne $df(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 0)$.

Lösung: Da die Exponentialfunktion stetig ist, und da die Funktionen, die in den Grenzen vom Integral stehen, offensichtlich glatt sind, kann man die partiellen Ableitungen von f bzgl. x und y mit Hilfe der Kettenregel und des Fundamentalsatzes der Integralrechnung berechnen:
Sei $F_z(t)$ eine Stammfunktion von $t \to e^{tz}$, d.h. $F_z'(t) = e^{tz}$. Dann ist $f(x, y, z) = F_z(z) - F_z(\cos(x) + \sin(y))$, also ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = -F_z'(\cos(x) + \sin(y)) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\cos(x) + \sin(y)) = \sin(x) \cdot e^{z\cdot(\cos(x)+\sin(y))}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{3}, 0) = 1$$

und analog

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -\cos(y) e^{z\cdot(\cos(x)+\sin(y)))} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{3}, 0) = -\cos(\tfrac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}.$$

In der Vorlesung wurde bewiesen, dass falls $h = h(z, t) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig ist mit stetiger partieller Ableitung $\frac{\partial f}{\partial z}$, dann ist die Funktion

$$u(z) = \int_0^z h(z, t) ds$$

differenzierbar mit Ableitung

$$\frac{du}{dz}(z) = h(t, z)|_{t=z} + \int_0^z \frac{\partial h}{\partial z}(z, t) dt$$

Weil die Funktion $h(z,t) = e^{tz}$ und ihre partielle Ableitung $\frac{\partial g}{\partial z}(t,z) = t \cdot e^{tz}$ nach z stetig sind, gilt also (beachte, dass die untere Grenze zwar x und y enthält, nicht jedoch z und somit für das Berechnen der partiellen Ableitung nach z wie eine Konstante behandelt werden kann)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial z}\int_{\cos(x)+\sin(y)}^{z} e^{tz}dt\\ &= e^{tz}|_{t=z} + \int_{\cos(x)+\sin(y)}^{z} \frac{\partial}{\partial z}e^{tz}dt\\ &= e^{z^2} + \int_{\cos(x)+\sin(y)}^{z} te^{tz}dt\end{aligned}$$

Also ist

$$\frac{\partial f}{\partial z}(\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{3},0) = 1 + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{0} te^{0\cdot t}dt = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

Wir erhalten also

$$df(\tfrac{\pi}{3},\tfrac{\pi}{3},0) = (1,\tfrac{1}{2},\tfrac{5}{8}).$$

5 Extrema I

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) := x^2 + 2xy - 4x - 2y.$$

a) Bestimmen Sie sowohl den grössten als auch den kleinsten Wert, den die Funktion f auf dem Viereck

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2\}$$

annimmt.

Lösung: Zunächst berechnen wir die erste Ableitung

$$\nabla f(x,y) = \Big(f_x(x,y), f_y(x,y)\Big) = \Big(2x + 2y - 4, 2x - 2\Big).$$

Für einen kritischen Punkt muss diese verschwinden, es muss also gelten

$$\begin{gathered}2x - 2 = 0 \implies x = 1\\ \text{und } 2x + 2y - 4 = 0 \Rightarrow 2 + 2y - 4 = 0 \Rightarrow y = 1.\end{gathered}$$

Somit ist $P_1 = (1,1)$ der einzige kritische Punkt von f im Inneren von D. Wir müssen noch überprüfen ob es, zusätzlich zu den Eckpunkten, auf dem Rand ∂D

Kandidaten für ein Maximum/Minimum von f gibt.

$$f(0,y) = -2y, \quad \frac{d}{dy}f(0,y) = -2 \Rightarrow \nexists \text{ Kandidaten auf } \{x=0\}$$

$$f(2,y) = 4+4y-8-2y = 2y-4, \quad \frac{d}{dy}f(2,y) = 2 \Rightarrow \nexists \text{ Kandidaten auf } \{x=2\}$$

$$f(x,0) = x^2-4x, \quad \frac{d}{dx}f(x,0) = 2x-4 = 0$$

$$\Rightarrow P_2 = (2,0) \text{ ist ein Kandidat auf } \{y=0\}$$

$$f(x,2) = x^2+4x-4x-4 = x^2-4, \quad \frac{d}{dx}f(x,2) = 2x = 0$$

$$\Rightarrow P_3 = (0,2) \text{ ist ein Kandidat auf } \{y=2\}$$

Die möglichen Kandidaten für Maxima/Minima sind also P_1, P_2, P_3 sowie die restlichen Eckpunkte $P_4 = (0,0), P_5 = (2,2)$. Wir setzen ein:

$$f(P_1) = 1+2-4-2 = -3, \quad f(P_2) = 4-8 = -4, \quad f(P_3) = -4$$
$$f(P_4) = 0, \quad f(P_5) = 4+8-8-4 = 0.$$

Somit ist 0 der grösste und -4 der kleinste Wert den f auf D annimt.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene Σ zur Fläche

$$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = f(x,y)\}$$

im Punkt $Q := (1,1,f(1,1))$.

Lösung: Da $P_1 = (1,1)$ ein kritischer Punkt von f ist, ist die Tangentialebene zu S im Punkt $Q = (1,1,f(1,1))$ von der Form $\Sigma = \{(x,y,z) \,|\, z = \text{konstant}\}$. Da $f(1,1) = -3$ ist folgt also $\Sigma = \{(x,y,z) \,|\, z = -3\}$.

6 Extrema II

Bestimmen Sie das globale Minimum und globale Maximum der Funktion $f : [0,\pi] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \sin(x)\sin(y)\sin(x+y).$$

Bestimmen Sie auch die Punkte, wo diese angenommen werden.

Lösung: Wir bemerken sofort, dass entweder $x = 0,\pi$ oder $y = 0,\pi$ auf ∂B. Daraus folgt, dass $f(x,y) = 0$ für alle $(x,y) \in \partial B$. Wir haben

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(x)\sin(y)\sin(x+y) + \sin(x)\sin(y)\cos(x+y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin(x)\cos(y)\sin(x+y) + \sin(x)\sin(y)\cos(x+y)$$

Nun nehmen wir an, dass f einen kritischen Punkt $(x,y) \in (0,\pi) \times (0,\pi)$ hat. Dann gilt $\sin(x), \sin(y) \neq 0$. Wir behaupten, dass $(x+y) \neq \pi$. Weil wäre $(x+y) = \pi$, dann hätten wir

$$0 \overset{!}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\sin(x)\sin(y),$$

was $x \in \{0, \pi\}$ oder $y \in \{0, \pi\}$ entspricht. Das ist ein Widerspruch! Daraus folgt, dass $\sin(x+y) \neq 0$. Aus unserer Annahme $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ folgt nun, dass

$$\begin{aligned} \cos(x)\sin(y)\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y)\sin(x+y) \\ \Rightarrow \cos(x)\sin(y) &= \sin(x)\cos(y) \\ \Leftrightarrow \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} &= \frac{\cos(y)}{\sin(y)} = \cot(y). \end{aligned}$$

Da die *Kotangens Funktion* auf der Menge $(0, \pi)$ injektiv ist, folgt, dass $x = y$. Somit haben wir

$$\begin{aligned} 0 \overset{!}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \cos(x)\sin(x)\sin(2x) + \sin(x)\sin(x)\cos(2x) \\ &= \sin(x)(\cos(x)\sin(2x) + \sin(x)\cos(2x)) \end{aligned}$$

und daraus folgt, dass

$$\cos(x)\sin(2x) = -\sin(x)\cos(2x),$$

was $x \neq \frac{\pi}{2}$ (oder $2x \neq \pi$) entspricht. Nun gibt es zwei verschiedene Fälle:

1) $2x \in (0, \pi)$. In diesem Fall haben wir $(\pi - 2x) \in (0, \pi)$ und da cot π-periodisch ist, $\cot(x) = -\cot(-x)$ für alle x und $\cot|_{(0,\pi)}$ injektiv ist, haben wir

$$\cot(\pi - 2x) = \cot(-2x) = \cot(x) \Rightarrow \pi - 2x = x \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}.$$

Da auch $y = x = \frac{\pi}{3}$ haben wir in diesem Fall

$$(x,y) = (\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{\pi}{3}). \tag{1}$$

2) $2x \in (\pi, 2\pi)$. In diesem Fall bemerken wir, dass $x \in (0,\pi) \Rightarrow (2\pi - x) \in (\pi, 2\pi)$. Genau wie oben haben wir nun

$$-\cot(2\pi - x) = -\cot(-x) = \cot(x) = -\cot(2x),$$

was $2x = 2\pi - x \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$ entspricht, da $\cot|_{(\pi,2\pi)}$ injektiv ist. Also,

$$(x,y) = (\tfrac{2\pi}{3}, \tfrac{2\pi}{3}). \tag{2}$$

Wir haben nun bewiesen, dass (1) und (2) die einzige *mögliche* kritische Punkte von f ist. Nun kontrolliert man, dass sie auch kritische Punkte von f sind. Somit haben wir bewiesen, dass $f|_{(0,\pi)\times(0,\pi)}$ nur die kritische Punkte (1) und (2) haben. Wir kontrollieren nun, dass

$$\begin{aligned} f(\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{\pi}{3}) &= \sin^3(\tfrac{\pi}{3}) > 0 \\ f(\tfrac{2\pi}{3}, \tfrac{2\pi}{3}) &= -\sin^3(\tfrac{\pi}{3}) < 0. \end{aligned}$$

Damit folgt, dass

$$\begin{aligned} \max_{[0,\pi]\times[0,\pi]}(f) &= \sin^3(\tfrac{\pi}{3}) \\ \min_{[0,\pi]\times[0,\pi]}(f) &= \sin^3(\tfrac{\pi}{3}). \end{aligned}$$

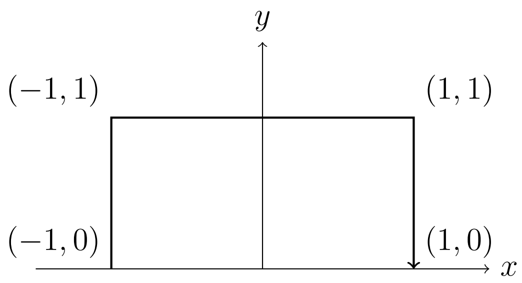
Diese Werte werden an der Stelle $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ bzw. an der Stelle $(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ angenommen.

7 Linienintegral

Gegeben sei der Streckung γ im $\mathbb{R}^2$ von $(-1,0)$ über $(-1,1)$ und $(1,1)$ nach $(1,0)$, sowie das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 4xy + 4y^2 \\ -2x^2 + 8xy + 12y^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Linienintegral $\int_\gamma v ds$ auf irgendeine Weise.



Lösung 1: Mit einem Potenzial. $\mathbb{R}^2$ ist konvex und wir haben

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = -4x + 8y$$
$$\frac{\partial v_2}{\partial x} = -4x + 8y.$$

Damit ist v konservativ und besitzt ein Potenzial $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Die Bedingung $\nabla f = v$ ergibt

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int_0^x 3t^2 - 4ty + 4y^2 \; dt + f(0,y) \\ &= [t^3]_0^x - 2y[t^2]_0^x + 4y^2x + f(0,y) \\ &= x^3 - 2yx^2 + 4y^2x + f(0,y) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} -2x^2 + 8xy + 12y^2 &\overset{!}{=} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2x^2 + 8yx + \frac{\partial f}{\partial y}(0,y) \\ &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 12y^2 \\ &\Rightarrow f(0,y) = 4y^3 + c \end{aligned}$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Wir wählen $c = 0$, so dass

$$f(x,y) = x^3 - 2yx^2 + 4y^2x + 4y^3$$

Nun folgt, dass

$$\int_\gamma v \; ds = f(1,0) - f(-1,0) = 1 - (-1) = 2.$$

Lösung 2: Direkt ausrechnen. Die Stücke von γ parametrisieren wir durch

$$\begin{aligned}
\gamma_1 :&[0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_1(t) = (-1,t)\\
\gamma_2 :&[-1,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_2(t) = (t,1)\\
\gamma_3 :&[0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_3(t) = (1,1-t).
\end{aligned}$$

Dann haben wir

$$\begin{aligned}
\int_\gamma v\ ds =& \int_0^1 \begin{pmatrix} 3+4t+4t^2 \\ -2+8t+12t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt\\
&+ \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} 3t^2-4t+4 \\ -2t^2+8t+12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt\\
&+ \int_0^1 \begin{pmatrix} 3-4(1-t)+4(1-t)^2 \\ -2+8(1-t)+12(1-t)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt\\
=& \int_0^1 -2-8t+12t^2\ dt\\
&+ \int_{-1}^1 3t^2-4t+4\ dt\\
&+ \int_0^1 2-8(1-t)-12(1-t)^2\ dt\\
=& -2-4[t^2]_0^1+4[t^3]_0^1\\
&+ [t^3]_{-1}^1 - 2[t^2]_{-1}^1 + 8\\
&- 6 + 4[t^2]_0^1 - 12\int_0^1 (1+t^2-2t)\ dt\\
=& -2+10-6 = 2
\end{aligned}$$

8 Potenzial

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$F(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2})$$

stetig differenzierbar ist. Wir definieren ein Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$v(x,y) = F(x,y) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

a) Beweisen Sie, dass v konservativ ist.

Lösung: Wir bemerken zunächst, dass v ein C^1-Vektorfeld ist. Schreiben wir

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} v_1(x,y) \\ v_2(x,y) \end{pmatrix},$$

dann gilt $v_1(x,y) = F(x,y)x$ und $v_2(x,y) = F(x,y)y$. Damit haben wir für

$(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\frac{\partial v_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)x = \frac{xyf'(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
$$\frac{\partial v_2}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)y = \frac{xyf'(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

also $\frac{\partial v_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial v_2}{\partial x}(x, y)$ für alle $(x, y) \neq (0, 0)$. Da diese zwei Ableitungen beide stetig sind, sind sie auch gleich am Ursprung. Da $\mathbb{R}^2$ konvex ist, folgt es, dass v konservativ ist.

b) Bestimmen Sie ein Potenzial von v.

Lösung: Da v konservativ und C^1 ist, wissen wir, dass v ein C^2-Potenzial hat. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$g(r) = \int_0^r f(t)t\, dt.$$

Wir defineren $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$G(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

und behaupten, dass G ein Potenzial von v ist. Offensichtlich ist G stetig. Da jedes Potenzial von v auch stetig ist, reicht es, wenn wir zeigen, dass G ein Potenzial von v ist auf der Menge $\mathbb{R}^2\backslash\{(0, 0)\}$. Für $(x, y) \neq (0, 0)$ haben wir wegen der Kettenregel

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{xg'(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{xf(\sqrt{x^2 + y^2})\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = F(x, y)x$$
$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{yg'(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{yf(\sqrt{x^2 + y^2})\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = F(x, y)y.$$

Dies löst die Aufgabe.

9 Der Satz von Green

Die Piriform Kurve C in $\mathbb{R}^2$ ist die Teilmenge

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3(2 - x)\}.$$

Eine Parametrisierung von C ist durch $\gamma : [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 + \sin(t) \\ \cos(t)(1 + \sin(t)) \end{pmatrix}$$

gegeben. Die Piriform Kurve ist der Rand von der Menge

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2 \text{ und } -\sqrt{x^3(2 - x)} \leq y \leq \sqrt{x^3(2 - x)}\}.$$

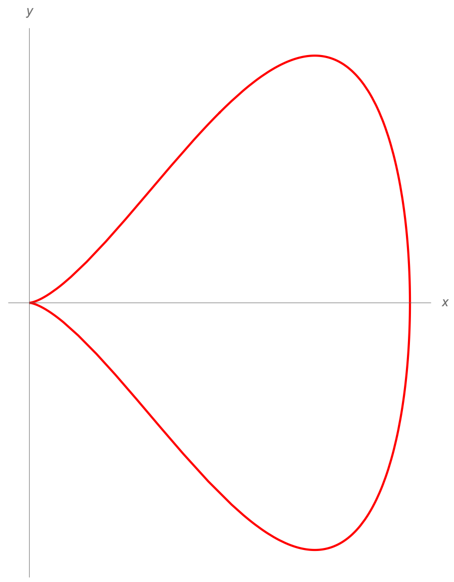


Abbildung 1: Die Piriform Kurve

Bestimmen Sie mittels des Satzes von Green die Fläche von Ω.
Lösung: Zunächst bemerken wir, dass die Parametrisierung γ die Piriform Kurve in Uhrzeigersinn parametrisiert. Damit parametrisiert $-\gamma$ die Piriform Kurve in Gegenuhrzeigersinn und der Satz von Green sagt, dass

$$\begin{aligned}\text{Fläche}(\Omega) &= -\int_{-\gamma} y\ dx = \int_{\gamma} y\ dx = \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \cos^2(t)(1+\sin(t))dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \cos^2(t)\ dt + \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \cos^2(t)\sin(t)\ dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2}\ dt = \pi.\end{aligned}$$

Hier benutzen wir die Periodizität von cos und sin, was

$$\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \cos(2t)\ dt = \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \cos^2(t)\sin(t)\ dt = 0$$

entspricht.

10 Integration mittels Substitution

Die Kardioide C ist die Kurve in $\mathbb{R}^2$, die durch

$$C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2+y^2-2x)^2 = 4(x^2+y^2)\}$$

definiert ist. C ist der Rand der Menge

$$\Omega := \{(tx,ty) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [0,1],\ (x,y) \in C\}.$$

Bestimmen Sie die Fläche von Ω mittels Integration in Polarkoordinaten.

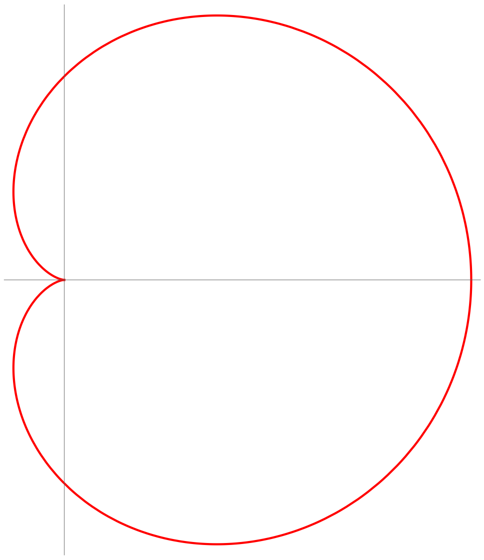


Abbildung 2: Die Kardioide

Lösung: Schreiben wir $x = r\cos(\varphi)$ und $y = r\sin(\varphi)$, dann haben wir für $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\begin{aligned} 4(x^2+y^2) = (x^2+y^2-2x)^2 &\Leftrightarrow 4r^2 = (r^2 - 2r\cos(\varphi))^2 \\ &\Leftrightarrow 2r = |r^2 - 2r\cos(\varphi)| = r|r - 2\cos(\varphi)| \\ &\Leftrightarrow 2 = |r - 2\cos(\varphi)|. \end{aligned}$$

Diese Berechnung sagt uns, dass die Funktion

$$C \backslash \{(0,0)\} \ni (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \mapsto r - 2\cos(\varphi)$$

an jedem Punkt von $C\backslash\{(0,0)\}$ entweder gleich 2 oder -2 ist. Da auch $C\backslash\{(0,0)\}$ zusammenhängend ist, folgt, dass sie konstant ist. Da $(4,0) = (4\cos(0), 4\sin(0)) \in C\backslash\{(0,0)\}$ und $4 - 2\cos(0) = 2$ folgt, dass wir für $(x,y) \neq (0,0)$

$$\begin{aligned} 4(x^2+y^2) = (x^2+y^2-2x)^2 &\Leftrightarrow 2 = r - 2\cos(\varphi) \\ &\Leftrightarrow r = 2(1+\cos(\varphi)) \end{aligned}$$

haben. Damit folgt, dass

$$\begin{aligned} \text{Fläche}(\Omega) &= \int_\Omega 1 \; dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^{2(1+\cos(\varphi))} r \; dr d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{2(1+\cos(\varphi))} d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} 2(1+\cos(\varphi))^2 \; d\varphi \\ &= 2\int_0^{2\pi} 1 + \cos^2(\varphi) + 2\cos(\varphi) \; d\varphi \\ &= 2\left(2\pi + \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2\varphi)}{2} \; d\varphi\right) \\ &= 2\,(2\pi + \pi) = 6\pi. \end{aligned}$$

Dies löst die Aufgabe.