1 Multiple Choice Fragen

a) Sei $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = \sin(y)^x$. Dann gilt für die partielle Ableitungen von f:

☐ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x\sin(y)^{x-1}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos(y)^x$.

☐ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin(y)^x \log(\sin(y))$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(y)\sin(y)^{x-1}$.

☐ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \log(1+|x|)\sin(y-x)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{\cos(y)}x$.

b) Welche ist die Menge M der Punkte, an denen die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = |xy|$$

beide partielle Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ besitzt?

☐ $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ und } y \neq 0\} \cup \{(0,0)\}$.

☐ $M = \mathbb{R}^2$.

☐ $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ und } y \neq 0\}$.

2 Richtungsableitungen

Berechnen Sie die Richtungsableitungen $D_u f(a)$ im Punkt a in Richtung u der folgenden Funktionen.

a) $f(x,y) = \sin(x^2)\cos(y^2)$, $a = (0,2)$, $u = (\frac{1}{2}, 1)$.

b) $f(x,y) = e^{-x}\ln(y)$, $a = (0,1)$, $u = (-1,4)$.

c) $f(x,y) = e^y \tan(x) + 4yx^3$, $a = (0,1)$, $u = (-1,4)$.

d) $f(x,y) = x^5 y + \sin(\frac{x^2}{y})$, $a = (4,2)$, $u = (-1,-2)$.

3 Partielle Ableitungen und die Kettenregel

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist eine *radiale Basis Funktion* wenn es eine Funktion $F : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ gibt so, dass

$$f(x,y) = F(\sqrt{x^2+y^2}) \quad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Untersuchen Sie durch (einfache!) Beispiele, ob alle Richtungsableitungen an allen Stellen einer radiale Basis Funktion existieren.

b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Radiale Basis Funktion. Nehmen Sie an, dass F an allen Stellen $r \in (0,\infty)$ stetig differenzierbar ist. Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ von f an eine Stelle $(0,0) \neq a \in \mathbb{R}^2$ existieren, und stellen Sie sie durch die Ableitung F' von F dar.

4 Partielle Ableitungen

Seien $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die stetige partielle Ableitungen haben. Nehmen Sie an, dass $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \frac{\partial g}{\partial y}(a)$ an jeder Stelle $a \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f - g$ nur von x abhängig ist.

5 Partielle Ableitungen und der Gradient

Der Gradient einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die stetige partielle Ableitungen hat, ist das Vektorfeld $\nabla f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, das durch

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a) \end{pmatrix}$$

definiert ist. Seien $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen die stetige partielle Ableitungen haben und nehmen Sie an, dass $\nabla(f - g)(a) = 0$ an jeder Stelle $a \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass $(f - g)$ eine konstante Funktion ist.

6 Eine partielle Differentialgleichung

Gibt es eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = yx^2 + x + 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2x + y, \quad f(0,0) = 1 \tag{1}$$

erfüllt? Gibt es mehrere?

Eine englische Version dieser Übungsserie finden Sie auf der nächsten Seite

7 Multiple Choice Questions

a) Let $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be defined by $f(x,y) = \sin(y)^x$. Then the partial derivatives of f are given by :

- ☐ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x\sin(y)^{x-1}$ and $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos(y)^x$.
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin(y)^x \log(\sin(y))$ and $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(y)\sin(y)^{x-1}$.
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \log(1+|x|)\sin(y-x)$ and $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{\cos(y)}x$.

b) Determine the set M consisting of points in which the function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = |xy|$$

has both partial derivatives $\frac{\partial f}{\partial x}$ and $\frac{\partial f}{\partial y}$.

- ☐ $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ and } y \neq 0\} \cup \{(0,0)\}$.
- ☐ $M = \mathbb{R}^2$.
- ☐ $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ and } y \neq 0\}$.

8 Directional derivatives

Determine the directional derivative $D_u f(a)$ at the point a in direction u of the following functions.

a) $f(x,y) = \sin(x^2)\cos(y^2)$, $a = (0,2)$, $u = (\frac{1}{2}, 1)$.

b) $f(x,y) = e^{-x}\ln(y)$, $a = (0,1)$, $u = (-1,4)$.

c) $f(x,y) = e^y \tan(x) + 4yx^3$, $a = (0,1)$, $u = (-1,4)$.

d) $f(x,y) = x^5 y + \sin(\frac{x^2}{y})$, $a = (4,2)$, $u = (-1,-2)$.

9 Directional derivatives and the chain rule

A function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is said to be a radial basis function if there exists a function $F : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ so that

$$f(x,y) = F(\sqrt{x^2+y^2}) \quad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Explore through (simple!) examples if directional derivatives exist at all points for a radial basis function.

b) Let $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be a radial basis function. Suppose that F is continuously differentiable at all points $r \in (0,\infty)$. Show that the partial derivatives $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ and $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ of f at a point $(0,0) \neq a \in \mathbb{R}^2$ exist, and represent these through the derivative F' of F.

10 Partial derivatives

Let $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be two functions, both of which have continuous partial derivatives. Assume that $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \frac{\partial g}{\partial y}(a)$ at every point $a \in \mathbb{R}^2$. Show that $f - g$ only depends on the x-variable.

11 Partielle derivatives and the gradient

The *gradient* of a function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, which has continuous partial derivatives, is the vector field $\nabla f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ defined by

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a) \end{pmatrix}.$$

Let $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be two functions, both of which have continuous partial derivatives, and assume that $\nabla(f - g)(a) = 0$ at every point $a \in \mathbb{R}^2$. Show that $(f - g)$ is a constant function.

12 A partial differential equation

Consider the following conditions:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = yx^2 + x + 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2 x + y, \quad f(0, 0) = 1 \tag{2}$$

Does there exist a function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ which satisfies (2)? Do there exist more such functions?