1 Multiple Choice Fragen

a) Sei $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = \sin(y)^x$. Dann gilt für die partielle Ableitungen von f:

☐ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x\sin(y)^{x-1}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos(y)^x$.

☑ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin(y)^x \log(\sin(y))$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(y)\sin(y)^{x-1}$.

Lösung: Wir schreiben $f(x,y) = e^{\log(\sin(y))x}$ und wenden die Kettenregel an:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{\log(\sin(y))x}\frac{\partial f}{\partial x}(\log(\sin(y))x) = e^{\log(\sin(y))x}\log(\sin(y)) = \sin(y)^x\log(\sin(y))$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{\log(\sin(y))x}\frac{\partial}{\partial y}(\log(\sin(y))x) = \sin(y)^x\frac{x\cos(y)}{\sin(y)} = x\cos(y)\sin(y)^{x-1}.$$

☐ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \log(1+|x|)\sin(y-x)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{\cos(y)}x$.

b) Welche ist die Menge M der Punkte, an denen die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = |xy|$$

beide partielle Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ besitzt?

☑ $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ und } y \neq 0\} \cup \{(0,0)\}$.

Lösung: Zunächst bestimmen wir die Menge M_x der Punkte (x,y) wo $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ existiert. Da $f(x,y) = |x||y|$ sind dies genau die Punkte wo die Funktion $x \mapsto |x||y|$ differenzierbar ist. $x \mapsto |x|$ ist differenzierbar an allen Stellen ausser $x = 0$ und somit ist für $y \neq 0$ die Funktion $x \mapsto f(x,y)$ differenzierbar an allen Stellen ausser $x = 0$. Für $y = 0$ ist die Funktion $x \mapsto f(x,0) = 0$ differenzierbar an allen Stellen. Also ist $M_x = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ und } y \neq 0\}$. Wegen der Symmetrie haben wir $M_x = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ und } y \neq 0\}$ und somit folgt

$$M = M_x \cap M_y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ und } y \neq 0\} \cup \{(0,0)\}.$$

☐ $M = \mathbb{R}^2$.

☐ $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ und } y \neq 0\}$.

2 Richtungsableitungen

Berechnen Sie die Richtungsableitungen $D_u f(a)$ im Punkt a in Richtung u der folgenden Funktionen.

a) $f(x,y) = \sin(x^2)\cos(y^2)$, $a = (0,2)$, $u = \frac{2}{\sqrt{5}}(\frac{1}{2}, 1)$.

Lösung: Von der Definition wissen wir, dass

$$D_u f(a) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(a+tu) \tag{1}$$

ist. Wenn wir einsetzen finden wir, dass

$$f(a+tu) = \sin(\tfrac{t^2}{5})\cos((2+\tfrac{2t}{\sqrt{5}})^2)$$

ist. Wegen der Produktregel haben wir somit

$$D_u f(a) = [\cos(\tfrac{t^2}{5})\tfrac{2t}{5}\cos((2+\tfrac{2t}{\sqrt{5}})^2) - \tfrac{4}{\sqrt{5}}(2+\tfrac{2t}{\sqrt{5}})\sin(\tfrac{t^2}{5})\sin((2+\tfrac{2t}{\sqrt{5}})^2)]_{t=0} = 0$$

b) $f(x,y) = e^{-x}\ln(y)$, $a=(0,1)$, $u=\frac{1}{\sqrt{17}}(-1,4)$.
Lösung: Wir haben

$$f(a+tu) = e^{\frac{t}{\sqrt{17}}}\ln(1+\tfrac{4t}{\sqrt{17}}).$$

Wenden wir (1) an, haben wir somit

$$D_u f(a) = \left[\frac{e^{\frac{t}{\sqrt{17}}}}{\sqrt{17}}\ln(1+\tfrac{4t}{\sqrt{17}}) + \frac{4e^{\frac{t}{\sqrt{17}}}}{\sqrt{17}(1+\frac{4t}{\sqrt{17}})}\right]_{t=0} = \frac{\ln(1)+4}{\sqrt{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}.$$

c) $f(x,y) = e^y\tan(x) + 4yx^3$, $a=(0,1)$, $u=\frac{1}{\sqrt{17}}(-1,4)$.
Lösung: Wir haben

$$f(a+tu) = e^{(1+\frac{4t}{\sqrt{17}})}\tan(\tfrac{-t}{\sqrt{17}}) + 4(1+\tfrac{4t}{\sqrt{17}})(\tfrac{-t}{\sqrt{17}})^3 = e^{(1+\frac{4t}{\sqrt{17}})}\tan(\tfrac{-t}{\sqrt{17}}) - 4(1+\tfrac{4t}{\sqrt{17}})(\tfrac{t}{\sqrt{17}})^3$$

und die Produktregel zusammen mit (1) gibt nun

$$\begin{aligned} D_u f(a) = \Bigg[&\tfrac{4}{\sqrt{17}}e^{(1+\frac{4t}{\sqrt{17}})}\tan(\tfrac{-t}{\sqrt{17}}) + e^{(1+\frac{4t}{\sqrt{17}})}\frac{-1}{\cos^2(\frac{-t}{\sqrt{17}})\sqrt{17}} \\ &-\frac{16}{\sqrt{17}}\frac{t^3}{\sqrt{17}^3} - 4(1+\frac{4t}{\sqrt{17}})\frac{3t^2}{\sqrt{17}^3}\Bigg]_{t=0} = \frac{-e}{\sqrt{17}} \end{aligned}$$

d) $f(x,y) = x^5y + \sin(\frac{x^2}{y})$, $a=(4,2)$, $u=\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,-2)$.
Lösung: Wir haben

$$f(a+tu) = 2(4-\tfrac{t}{\sqrt{5}})^5(1-\tfrac{t}{\sqrt{5}}) + \sin\left(\frac{(4-\frac{t}{\sqrt{5}})^2}{2(1-\frac{t}{\sqrt{5}})}\right),$$

und somit

$$\begin{aligned} D_u f(a) &= \left[-\tfrac{10}{\sqrt{5}}(4-\tfrac{t}{\sqrt{5}})^4(1-\tfrac{t}{\sqrt{5}}) - 2(4-\tfrac{t}{\sqrt{5}})^5\tfrac{1}{\sqrt{5}} + \cos\left(\frac{(4-\frac{t}{\sqrt{5}})^2}{2(1-\frac{t}{\sqrt{5}})}\right)\left(-\frac{4-\frac{t}{\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-t} + \frac{2(4-\frac{t}{\sqrt{5}})^2}{\sqrt{5}(2-\frac{2t}{\sqrt{5}})^2}\right)\right]_{t=0} \\ &= -\tfrac{10}{\sqrt{5}}256 - 2\cdot 4^5\tfrac{1}{\sqrt{5}} + \cos(8)\left(-\tfrac{4}{\sqrt{5}} + \tfrac{2\cdot 16}{4\sqrt{5}}\right) \\ &= -\tfrac{2560}{\sqrt{5}} - \tfrac{2048}{\sqrt{5}} + \cos(8)\tfrac{4}{\sqrt{5}} \\ &= \tfrac{512}{\sqrt{5}} + \cos(8)\tfrac{1}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

3 Partielle Ableitungen und die Kettenregel

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist eine *radiale Basis Funktion* wenn es eine Funktion $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gibt so, dass

$$f(x, y) = F(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad \forall \ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Untersuchen Sie durch (einfache!) Beispiele, ob alle Richtungsableitungen an allen Stellen einer radiale Basis Funktion existieren.

Lösung: Die Funktion $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist eine radiale Basis Funktion (setzen Sie $F(r) = r$). Sei $0 \neq u \in \mathbb{R}^2$. Dann ist $f(tu) = |t||u|$. Da die Funktion $\mathbb{R} \ni t \mapsto |t|$ keine Ableitung im Ursprung hat sehen wir, dass $D_u f(0)$ für *keine* $0 \neq u \in \mathbb{R}^2$ existiert!

Eines anderes Beispiel ist $f(x, y) = x^2 + y^2$ (nehmen Sie $F(r) = r^2$). Hier sieht man sofort, dass $D_u f(a)$ für alle $a, u \in \mathbb{R}^2$ existiert.

b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Radiale Basis Funktion. Nehmen Sie an, dass F an allen Stellen $r \in (0, \infty)$ stetig differenzierbar ist. Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ von f an eine Stelle $(0, 0) \neq a \in \mathbb{R}^2$ existieren, und stellen Sie sie durch die Ableitung F' von F dar.

Lösung: Sei $(0, 0) \neq a = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Von der Definition einer partiellen Ableitung haben wir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(x_0 + t, y_0).$$

Wir können $f(x_0 + t, y_0) = F(\sqrt{(x_0 + t)^2 + y_0^2})$ schreiben. Wegen $a \neq (0, 0)$ ist die Funktion $t \mapsto \sqrt{(x_0 + t)^2 + y_0^2}$ differenzierbar an der Stelle $t = 0$. Somit folgt aus der Kettenregel, dass $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ existiert und, dass

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \left[F'(\sqrt{(x_0 + t)^2 + y_0^2}) \frac{x_0 + t}{\sqrt{(x_0 + t)^2 + y_0^2}} \right]_{t=0} = \frac{x_0 F'(\sqrt{x_0^2 + y_0^2})}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$$

Dieselbe Argument zeigt, dass

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(a) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(x_0, y_0 + t) &= \left[F'(\sqrt{x_0 + (y_0 + t)^2}) \frac{y_0 + t}{\sqrt{x_0^2 + (y_0 + t)^2}} \right]_{t=0} \\ &= \frac{y_0 F'(\sqrt{x_0^2 + y_0^2})}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}. \end{aligned}$$

4 Partielle Ableitungen

Seien $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die stetige partielle Ableitungen haben. Nehmen Sie an, dass $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \frac{\partial g}{\partial y}(a)$ an jeder Stelle $a \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f - g$ nur von x abhängig ist.

Lösung: Dass $f - g$ von y unabhängig ist heisst, dass für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ die Funktion $y \mapsto (f - g)(x_0, y)$ konstant ist. Da $y \mapsto (f - g)(x_0, y)$ differenzierbar ist,

ist sie konstant genau dann wenn ihre Ableitung verschwindet. Ihre Ableitung ist durch

$$\frac{\partial}{\partial y}(f-g)(x_0,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y) - \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y) = 0$$

gegeben. Somit haben wir gezeigt, dass $f-g$ von y unabhängig ist.

5 Partielle Ableitungen und der Gradient

Der Gradient einer Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ die stetige partielle Ableitungen hat, ist das Vektorfeld $\nabla f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, das durch

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a) \end{pmatrix}$$

definiert ist. Seien $f,g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ zwei Funktionen die stetige partielle Ableitungen haben und nehmen Sie an, dass $\nabla(f-g)(a)=0$ an jeder Stelle $a\in\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass $(f-g)$ eine konstante Funktion ist.
Lösung: $\nabla(f-g)(a)=0$ heisst, dass

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) - \frac{\partial g}{\partial x}(a) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a) - \frac{\partial g}{\partial y}(a) = 0$$

an jeder Stelle $a\in\mathbb{R}^2$. Somit zeigt Übung 4, dass $(f-g)$ unabhängig von x und y ist. Also ist $(f-g)$ konstant.

6 Partielle Differentialgleichungen

Gibt es eine Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ die

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = yx^2+x+2y, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2x+y, \quad f(0,0)=1 \tag{2}$$

erfüllt? Gibt es mehrere?
Lösung: Nehmen wir an, dass es eine Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ gibt die, die Bedingungen erfült. Dann haben wir

$$\begin{aligned} f(x,y_0)-f(x,0) &= \int_0^{y_0} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dy = \int_0^{y_0} yx^2+x+2y\,dy \\ &= [\tfrac{x^2y^2}{2}+xy+y^2]_{y=0}^{y_0} = \tfrac{x^2y_0^2}{2}+xy_0+y_0^2. \end{aligned}$$

Somit erfüllt f

$$f(x,y) = f(x,0) + \tfrac{x^2y^2}{2} + xy + y^2. \tag{3}$$

Wegen der zweiten Bedingung haben wir auch

$$y^2x+y = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(f(x,0)+\tfrac{x^2y^2}{2}+xy+y^2) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,0)+xy^2+y.$$

Wenn wir die zwei Seiten vergleichen, sehen wir, dass

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 0 \quad \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

Somit ist also $c := f(x, 0)$ eine Konstante und (3) können wir jetzt als

$$f(x, y) = \frac{x^2y^2}{2} + xy + y^2 + c$$

schreiben. Um c zu bestimmen benutzen wir nun die dritte Bedingung:

$$1 = f(0, 0) = c.$$

Somit haben wir bewiesen, dass $f(x, y) = \frac{x^2y^2}{2} + xy + y^2 + 1$ sein muss. Jetzt kontrolliert man sofort, dass diese f die Bedingungen (2) erfüllt. Also gibt es mindestens eine Funktion die unsere Bedingungen erfüllt.

Wir behaupten, dass $f(x, y) = \frac{x^2y^2}{2} + xy + y^2 + 1$ die einzige Funktion ist, die (2) erfüllt. Oben haben wir ja genau bewiesen, dass eine Funktion die (2) erfüllt muss gleich $\frac{x^2y^2}{2} + xy + y^2 + 1$ sein. Sonst kann man durch Übung 5 argumentieren: Wenn $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen sind, die beide (2) erfüllen, dann ist $\nabla(f - g)(a) = 0$ an allen Stellen $a \in \mathbb{R}^2$. Also, ist $f - g$ konstant. Deswegen folgt aus der dritten Bedingung in (2), dass $f = g$, was auch die Eindeutigkeit zeigt.