1 Multiple Choice Fragen

a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und sei $a \in \mathbb{R}^2$ gegeben. In welche Richtung von a wächst f am schnellsten?

☐ In die Richtung $\nabla f(a)$.

☐ In die Richtung $-\nabla f(a)$.

☐ In einer Richtung die Orthogonal zu $\nabla f(a)$ ist.

b) Sei $a \in \mathbb{R}$. Wir suchen Lösungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zu der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin(axy). \tag{1}$$

Welche der folgenden Aussagen gilt?

☐ Für alle $a \in \mathbb{R}$ gibt es *mehrere* Lösungen.

☐ Für alle $a \in \mathbb{R}$ gibt es eine *eindeutige* Lösung.

☐ Für $a = 0$ gibt es mehrere Lösungen. Für $a \neq 0$ gibt es keine Lösungen.

☐ Für $a = 0$ gibt es eine eindeutige Lösung. Für $a \neq 0$ gibt es keine Lösungen.

2 Der Gradient 1

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Nehmen Sie an, dass die Richtungsableitung von f an der Stelle $a \in \mathbb{R}^2$ in Richtung Nordost gleich 2 ist und, dass die Richtungsableitung von f an der Stelle $a \in \mathbb{R}^2$ in Richtung Südost gleich -1 ist. Bestimmen Sie $\nabla f(a)$.

3 Der Gradient 2

Ein Tröpfchen landet im $(0,0,1)$ auf den Graphen

$$\mathcal{G}(f) := \{(x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \cos(xy)e^x.$$

Das Tröpfchen fliesst durch die Schwerkraft angetrieben auf dem steilst möglichsten Weg nach unten. In welche Richtung fliesst das Tropfchen direkt nach dem auftreffen auf dem Graphen? Wie gross ist die Steigung des Graphen in diese Richtung?

4 Partielle Ableitungen vs. differenzierbarkeit

In der Vorlesung haben Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{wenn } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{wenn } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

angeschaut. Hier möchten wir sie genauer anschauen um die Beziehung zwischen Richtungsableitungen und differenzierbarkeit zu verstehen.

a) Zeigen Sie dass f in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}^2$ und in jeder Richtung $u \in \mathbb{R}^2$ eine Richtungsableitung $D_u f(a)$ besitzt.

Tipp: Um zu beweisen dass $D_u f(a)$ existiert, muss man zeigen dass $t \mapsto f(a+tu)$ differenzierbar an der Stelle $t = 0$ ist. Für $a \neq (0,0)$ reicht es deswegen $(a + tu)$ in f einzusetzen und danach zu bemerken, dass diese Funktion differenzierbar an der Stelle $t = 0$ ist. Für $a = (0,0)$ muss man die Definition anwenden.

b) Zeigen Sie, dass f an der Stelle $(0,0)$ *nicht* differenzierbar ist.

Tipp: Wiederholen Sie, dass wenn f an der Stelle $a \in \mathbb{R}^2$ differenzierbar ist, dann ist sie auch an der Stelle a stetig...

5 Die eindeutigkeit des Differentials

In der Vorlesung haben Sie das folgende Lemma gesehen

Lemma. *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gegeben und sei $A_1, A_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zwei lineare Abbildungen. Wenn*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - A_k(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0 \tag{2}$$

für $k = 1, 2$, dann gilt $A_1 = A_2$.

Beweisen Sie das Lemma.

6 Linien und Ebenen (Wiederholung vom letzten Semester)

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$, die durch die drei Punkte

$$(1, 1, 1), \ (1, 2, 1), \ (1, 3, 4)$$

geht.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$, die durch den Punkt $(-1, 2, 1)$ geht und deren Normalenvektor $(1, 2, 3)$ ist.

Eine englische Version dieser Übungsserie finden Sie auf der nächsten Seite

7 Multiple Choice Questions

a) Let $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be continuously differentiable and let $a \in \mathbb{R}^2$. In which direction from a does f grow fastest?

- ☐ In the direction $\nabla f(a)$.
- ☐ In the direction $-\nabla f(a)$.
- ☐ In some direction perpendicular to $\nabla f(a)$.

b) Let $a \in \mathbb{R}$. We are looking for solutions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ to the partial differential equation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sin(axy). \tag{3}$$

Which of the following statements are true?

- ☐ For all $a \in \mathbb{R}$ there are *several* solutions.
- ☐ For all $a \in \mathbb{R}$ there is a *unique* solution.
- ☐ For $a = 0$ there are several solutions. For $a \neq 0$ there are no solutions.
- ☐ For $a = 0$ there is a unique solution. For $a \neq 0$ there are no solutions.

8 The gradient 1

Let $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be continuously differentiable. Suppose the directional derivative of f at the point $a \in \mathbb{R}^2$ in direction northeast is 2, and that the directional derivative of f at the point $a \in \mathbb{R}^2$ in direction southeast is -1. Determine $\nabla f(a)$.

9 The gradient 2

A drop lands at the point $(0, 0, 1)$ of the graph

$$\mathcal{G}(f) := \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

of the function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \cos(xy)e^x.$$

The drop slides along the graph, due to the gravitational force, in the direction of steepest descent on the graph. In which direction does the drop slide right after it hits the graph? How large is the descent in this direction?

10 Partielle Ableitungen vs. differenzierbarkeit

In the lecture you have studied the function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{if } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Here we will study f further in order to understand the relation between differentiability and directional derivatives.

a) Show that f has a directional derivative $D_u f(a)$ in every point $a \in \mathbb{R}^2$ and every direction $u \in \mathbb{R}^2$.

Tip: To show that $D_u f(a)$ exists one has to show that $t \mapsto f(a + tu)$ is differentiable at $t = 0$. For $a \neq (0,0)$ it suffices to plug $(a + tu)$ into f and note that it is a composition of differentiable functions. For $a = (0,0)$ one has to use the definition of differentiability in one variable.

b) Show that f is *not* differentiable at $(0,0)$.

Tip: Remember that, if f is differentiable at a point $a \in \mathbb{R}^2$, then it is also continuous at a...

11 Uniqueness of the differential

In the lecture you have seen the following lemma

Lemma. *Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ and $x_0 \in \mathbb{R}^n$ and let $A_1, A_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ be two linear maps. If*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - A_k(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0 \tag{4}$$

for $k = 1, 2$, then $A_1 = A_2$.

Prove the lemma.

12 Lines and planes (repetition from last semester)

a) Determine the coordinate equation characterizing the plane $E \subset \mathbb{R}^3$, which runs through the three points

$$(1,1,1), \ (1,2,1), \ (1,3,4).$$

b) Determine the coordinate equation characterizing the plane $E \subset \mathbb{R}^3$, which runs through the point $(-1,2,1)$ and whose normal vector is $(1,2,3)$.