1 Multiple Choice Fragen

a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und sei $a \in \mathbb{R}^2$ gegeben. In welche Richtung von a wächst f am schnellsten?

☑ In die Richtung $\nabla f(a)$.

☐ In die Richtung $-\nabla f(a)$.

☐ In einer Richtung die Orthogonal zu $\nabla f(a)$ ist.

b) Sei $a \in \mathbb{R}$. Wir suchen Lösungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zu der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin(axy). \tag{1}$$

Welche der folgenden Aussagen gilt?

☐ Für alle $a \in \mathbb{R}$ gibt es *mehrere* Lösungen.

☐ Für alle $a \in \mathbb{R}$ gibt es eine *eindeutige* Lösung.

☑ Für $a = 0$ gibt es mehrere Lösungen. Für $a \neq 0$ gibt es keine Lösungen.

Lösung: Für $a = 0$ ist die rechte Seite in (1) gleich 0. Das heisst, die Lösungen sind genau die $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\nabla f(x,y) = 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Aus Serie 2, Übung 5 folgt nun dass die Lösungen genau die konstanten Funktionen sind. Also gibt es unendlich viele verschiedene Lösungen.

Um die zweite Aussage zu beweisen nehmen wir an, um einen Widerspruch zu erreichen, dass $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Lösung zu (1) ist mit $a \neq 0$. Dann ist auch $(x,y) \mapsto f(x,y) - f(0,0)$ eine Lösung, und somit können wir annehmen, dass $f(0,0) = 0$. Dann haben wir

$$f(x_0,0) = f(x_0,0) - f(0,0) = \int_0^{x_0} \sin(0xa)dx = 0$$
$$f(0,y_0) = f(0,y_0) - f(0,0) = \int_0^{y_0} \sin(0ya)dy = 0$$

für alle $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Wir setzen nun $x_0 = 1$ und $y_0 = \frac{1}{a}$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} f(x_0,y_0) = f(x_0,y_0) - f(x_0,0) &= \int_0^{y_0} \frac{\partial f}{\partial y}(1,y)dy = \int_0^{y_0} \sin(ay)dy \\ &= \frac{1}{a}\int_0^{y_0} a\sin(ay)dy = \frac{1}{a}[-\cos(ay)]_{y=0}^{y_0} = \frac{1-\cos(1)}{a}. \end{aligned}$$

Anderseits haben wir auch

$$\begin{aligned} f(x_0,y_0) = f(x_0,y_0) - f(0,y_0) &= \int_0^{x_0} \sin(axy_0)dx = \int_0^{x_0} \sin(x)dx \\ &= [-\cos(x)]_{x=0}^{x_0} = 1 - \cos(1). \end{aligned}$$

Dieser Widerspruch zeigt, dass es keine Lösung zu (1) gibt wenn $a \neq 0$.

☐ Für $a = 0$ gibt es eine eindeutige Lösung. Für $a \neq 0$ gibt es keine Lösungen.

2 Der Gradient 1

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Nehmen Sie an, dass die Richtungsableitung von f an der Stelle $a \in \mathbb{R}^2$ in Richtung Nordost gleich 2 ist und, dass die Richtungsableitung von f an der Stelle $a \in \mathbb{R}^2$ in Richtung Südost gleich -1 ist. Bestimmen Sie $\nabla f(a)$.

Lösung: Die Einheitsvektoren in die Richtungen Nordost und Südost sind durch

$$u_{NO} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \quad \text{und} \quad u_{SO} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$$

gegeben. Da $D_u f(a) = \nabla f(a) \cdot u$ geben unsere Annahmen jetzt

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right) = \nabla f(a) \cdot u_{NO} = 2 \tag{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) - \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right) = \nabla f(a) \cdot u_{SO} = -1. \tag{3}$$

Die Gleichung (3) gibt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) - \sqrt{2} \tag{4}$$

Wenn wir dieses Ergebnis in (2) einsetzen folgt, dass

$$2\sqrt{2} = \frac{\partial f}{\partial x}(a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 2\frac{\partial f}{\partial y}(a) - \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Somit gibt (4), dass

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dass heisst,

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3 Der Gradient 2

Ein Tröpfchen landet im $(0,0,1)$ auf den Graphen $\mathcal{G}(f) := \{(x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \cos(xy)e^x.$$

Das Tröpfchen fliesst durch die Schwerkraft angetrieben auf dem steilst möglichsten Weg nach unten. In welche Richtung fliesst das Tropfchen direkt nach dem auftreffen auf dem Graphen? Wie gross ist die Steigung des Graphen in diese Richtung?

Lösung: Es gilt,

$$\nabla f(x,y) = e^x \begin{pmatrix} \cos(xy) - \sin(xy)y \\ -\sin(xy)x \end{pmatrix}$$

und somit haben wir

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da f an der Stelle $a \in \mathbb{R}^2$ in der Richtung $\nabla f(a)$ am schnellsten wächst, ist die Richtung in der, der Graphen von f am schnellsten nach unten läuft $-\nabla f(a)$. Also fliesst das Tröpfchen in der Richtung $u := -\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die Steigung des Graphen in dieser Richtung ist

$$D_u f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot u = -|\nabla f(0,0)|^2 = -1.$$

4 Partielle Ableitungen vs. differenzierbarkeit

In der Vorlesung haben Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{wenn } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{wenn } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

angeschaut. Hier möchten wir sie genauer anschauen um die Beziehung zwischen Richtungsableitungen und differenzierbarkeit zu verstehen.

a) Zeigen Sie dass f in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}^2$ und in jeder Richtung $u \in \mathbb{R}^2$ eine Richtungsableitung $D_u f(a)$ besitzt.

Tipp: Um zu beweisen dass $D_u f(a)$ existiert, muss man zeigen dass $t \mapsto f(a+tu)$ differenzierbar an der Stelle $t = 0$ ist. Für $a \neq (0,0)$ reicht es deswegen $(a + tu)$ in f einzusetzen und danach zu bemerken, dass diese Funktion differenzierbar an der Stelle $t = 0$ ist. Für $a = (0,0)$ muss man die Definition anwenden.

Lösung: Sei $a = (x_0, y_0) \neq (0,0)$ und $u = (u_1, u_2) \neq (0,0)$. Dann haben wir

$$f(a+tu) = \frac{(x_0 + tu_1)^2 (y_0 + tu_2)}{(x_0 + tu_1)^4 + (y_0 + tu_2)^2}.$$

Da der Nenner $\neq 0$ ist für $t = 0$ gibt die Quotientenregel, dass $t \mapsto f(a + tu)$ differenzierbar ist an der Stelle $t = 0$. Somit haben wir gezeigt dass alle Richtungsableitungen an der Stelle a existieren. Jetzt zeigen wir, dass alle Richtungsableitungen an der Stelle $a = (0,0)$ existieren. Zunächst bemerken wir, dass f auf der Linie $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$ verschwindet. Somit folgt, dass $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Für einen Vektor $u = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ mit $\sin(\theta) \neq 0$ haben wir

$$f((0,0) + tu) = f(tu) = \frac{t^3 r^3 \cos^2(\theta)\sin(\theta)}{t^4 r^4 \cos^4(\theta) + t^2 r^2 \sin^2(\theta)} = \frac{tr\cos^2(\theta)\sin(\theta)}{t^2 r^2 \cos^4(\theta) + \sin^2(\theta)}.$$

Da $\sin^2(\theta) \neq 0$ gibt die Quotientenregel nochmal, dass $D_u f(0,0) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(tu) = \frac{r\cos^2(\theta)\sin(\theta)}{\sin^2(\theta)} = \frac{r\cos^2(\theta)}{\sin(\theta)}$ ist. Somit haben wir gezeigt, dass alle Richtungsableitungen an allen Stellen existieren, und damit ist die Übung gelöst.

b) Zeigen Sie, dass f an der Stelle $(0,0)$ *nicht* differenzierbar ist.

Tipp: Wiederholen Sie, dass wenn f an der Stelle $a \in \mathbb{R}^2$ differenzierbar ist, dann ist sie auch an der Stelle a stetig...

Lösung: Wir wissen schon von Serie 1, Übung 2b, dass f an der Stelle $(0,0)$ nicht stetig ist. Somit kann f nicht an $(0,0)$ differenzierbar sein.

5 Die eindeutigkeit des Differentials

In der Vorlesung haben Sie das folgende Lemma gesehen

Lemma. *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gegeben und sei $A_1, A_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zwei lineare Abbildungen. Wenn*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - A_k(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0 \tag{5}$$

für $k = 1, 2$, dann gilt $A_1 = A_2$.

Beweisen Sie das Lemma.
Lösung: Wir sehen sofort, dass

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{x \to x_0} \frac{\|A_1(x - x_0) - A_2(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x_0) - f(x) + A_1(x - x_0) + f(x) - f(x_0) - A_2(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \\
&\leq \lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - A_1(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} + \lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - A_2(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0,
\end{aligned}$$

wo wir (5) anwenden. Für einen beliebigen $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ setzen wir $x := x_0 + tv$. Unsere Rechnung gibt nun

$$0 = \lim_{t \to 0} \frac{\|A_1(tv) - A_2(tv)\|}{\|tv\|} = \lim_{t \to 0} \frac{|t|\|A_1(v) - A_2(v)\|}{|t|\|v\|} = \frac{\|A_1(v) - A_2(v)\|}{\|v\|},$$

weil A_1 und A_2 linear sind. Somit ist $A_1(v) = A_2(v)$. Da $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ beliebig war, haben wir die Behauptung gezeigt.

6 Linien und Ebenen (Wiederholung vom letzten Semester)

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$, die durch die drei Punkte

$$(1,1,1),\ (1,2,1),\ (1,3,4)$$

geht.

Lösung: Wir definieren die zwei Vektoren

$$u := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$u \times v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Somit sehen wir, dass $(x, y, z) \in E$ genau dann, wenn

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + w$$

für ein Vektor $w \in \mathbb{R}^3$, so dass $w \cdot (u \times v) = 0$. Also, $(x, y, z) \in E$ genau dann, wenn

$$0 = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \cdot (u \times v) = 3(x-1) \Leftrightarrow x = 1.$$

Also ist die Gleichung der Ebene E

$$x = 1.$$

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$, die durch den Punkt $(-1, 2, 1)$ geht und deren Normalenvektor $(1, 2, 3)$ ist.

Lösung: Wir haben wiederum, dass $(x, y, z) \in E$ genau dann, wenn

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + w$$

für ein $w \in \mathbb{R}^3$ mit

$$w \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0.$$

Somit ist $(x, y, z) \in E$ genau dann, wenn

$$0 = \begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \\ z-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = x + 1 + 2(y-2) + 3(z-1) = x + 2y + 3z - 6.$$

Also ist die Gleichung der Ebene E

$$x + 2y + 3z = 6.$$