1 Multiple Choice Fragen

a) Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen. Welche Formel ist im allgemein wahr?

☐ $\nabla(f \cdot g) = \nabla(f)g + f\nabla(g)$
☐ $\nabla(f \cdot g) = fg + \nabla(f)g + f\nabla(g)$
☐ $\nabla(f \cdot g) = \nabla(f)g^2 + f^2\nabla(g)$

b) Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = (xy)^3.$$

Wo verschwindet der Gradient von f?

☐ Nur im Ursprung
☐ Auf der x- und der y-Achse.
☐ Nirgends.

2 Differenzialrechnung in mehrere Variablen

a) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y, z) = \int_{\sin(x)}^{\cos(y)} e^{zt} dt$$

definiert. Berechnen Sie $\nabla f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, 0)$.

b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{wenn } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{wenn } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

gegeben. Beweisen Sie, dass $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ existieren und, dass

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0).$$

3 Die Geometrie des Gradientes

Sei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante und sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nichtkonstant und differenzierbar. Nehmen Sie an, dass die Gleichung $f(x, y) = c$ eine Kurve C in der Ebene $\mathbb{R}^2$ definiert. Das heisst, es gibt ein Interval $I \subset \mathbb{R}$ und eine injektive, differenzierbare Abbildung $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, so dass

$$\gamma(I) = C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\} \tag{1}$$

und $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) ∇f steht senkrecht zu C. Dass heisst, für jede $t \in I$ ist $\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$.

b) Die Richtungsableitung von f in Richtung C verschwindet. Dass heisst, $D_{\gamma'(t)} f(\gamma(t)) = 0$ für alle $t \in I$.

c) Die Richtungsableitung von f ist am grössten in einer Richtung senkrecht zu C.

4 Tangentialebenen

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) = \sin(x) - y^3 + y^2$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene von der Fläche

$$\mathcal{G}(f) := \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3$$

im Punkt $(0, 3, f(0, 3)) = (0, 3, -18)$.

b) Bestimmen Sie eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so dass der Vektor

$$\begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

senkrecht zur Fläche $\mathcal{G}(f)$ am Punkt $(\frac{\pi}{2}, 0, 0) \in \mathcal{G}(f)$ steht.

Eine englische Version dieser Übungsserie finden Sie auf der nächsten Seite

5 Multiple Choice Questions

a) Let $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be two differentiable functions. Which of the following formulas is correct in general?

☐ $\nabla(f \cdot g) = \nabla(f)g + f\nabla(g)$
☐ $\nabla(f \cdot g) = fg + \nabla(f)g + f\nabla(g)$
☐ $\nabla(f \cdot g) = \nabla(f)g^2 + f^2\nabla(g)$

b) We consider the function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = (xy)^3.$$

Where does the gradient of f vanish?

☐ Only at the origin.
☐ On the x- and y-axes.
☐ Nowhere.

6 Differentiation rules in more variables

a) Let $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ be given by

$$f(x, y, z) = \int_{\sin(x)}^{\cos(y)} e^{zt} dt.$$

Compute $\nabla f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, 0)$.

b) Let $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be given by

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{if } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Prove that $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ and $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ exist, and that

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0).$$

7 The geometry of the gradient

Let $c \in \mathbb{R}$ be a constant and let $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be a non-constant differentiable function. Assume that the equation $f(x, y) = c$ defines a curve C in the plane $\mathbb{R}^2$. I.e. there exists an interval $I \subset \mathbb{R}$ and an injective, differentiable map $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, so that

$$\gamma(I) = C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\} \tag{2}$$

and $\gamma'(t) \neq 0$ fr all $t \in I$. Prove the following statements:

a) ∇f is perpendicular to C. I.e. for all $t \in I$ we have $\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$.

b) The directional derivative of f in a direction along C vanishes. I.e. $D_{\gamma'(t)} f(\gamma(t)) = 0$ for all $t \in I$.

c) The directional derivative of f is largest in a direction perpendicular to C.

8 Tangential planes

Let $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be given by

$$f(x, y) = \sin(x) - y^3 + y^2.$$

a) Determine the equation of the tangential plane of the surface

$$\mathcal{G}(f) := \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3$$

at the point $(0, 3, f(0, 3)) = (0, 3, -18)$.

b) Determine a constant $c \in \mathbb{R}$, so that the vector

$$\begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

is perpendicular to the surface $\mathcal{G}(f)$ at the point $(\frac{\pi}{2}, 0, 0) \in \mathcal{G}(f)$.