1 Multiple Choice Fragen

a) Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen. Welche Formel ist im allgemein wahr?

☑ $\nabla(f \cdot g) = \nabla(f)g + f\nabla(g)$

Lösung: Wegen der "normale" Produktregel sieht man sofort, dass

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(fg) = \frac{\partial f}{\partial x_k} g + f \frac{\partial g}{\partial x_k}.$$

für alle $k \in \{1, \dots, n\}$. Daraus folgt die Behauptung.

☐ $\nabla(f \cdot g) = fg + \nabla(f)g + f\nabla(g)$

☐ $\nabla(f \cdot g) = \nabla(f)g^2 + f^2\nabla(g)$

b) Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = (xy)^3.$$

Wo verschwindet der Gradient von f?

☐ Nur im Ursprung

☑ Auf der x- und der y-Achse.

Lösung: Wir haben $\nabla f(x, y) = 3 \begin{pmatrix} x^2y^3 \\ x^3y^2 \end{pmatrix}$

☐ Nirgends.

2 Differenzialrechnung in mehrere Variablen

a) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y, z) = \int_{\sin(x)}^{\cos(y)} e^{zt} dt$$

definiert. Berechnen Sie $\nabla f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, 0)$.

Lösung: Man wendet die Kettenregel an:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{\cos(y)}^{\sin(x)} e^{zt} dt\right) = -e^{z\sin(x)}\cos(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{\sin(x)}^{\cos(y)} e^{zt} dt\right) = -e^{z\cos(y)}\sin(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\int_{\sin(x)}^{\cos(y)} e^{zt} dt\right) = \int_{\sin(x)}^{\cos(y)} \frac{\partial}{\partial z}(e^{zt}) dt = \int_{\sin(x)}^{\cos(y)} te^{zt} dt$$

Einsetzung von $(x, y, z) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, 0)$ gibt nun

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{\pi}{2}, 0) = -\cos(\tfrac{\pi}{3}) = -\tfrac{1}{2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{\pi}{2}, 0) = -\sin(\tfrac{\pi}{2}) = -1$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{\pi}{2}, 0) = \int_{\sin(\frac{\pi}{3})}^{\cos(\frac{\pi}{2})} t dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{t=\frac{\sqrt{3}}{2}}^{0} = -\frac{3}{8}$$

Somit haben wir

$$\nabla f(\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{\pi}{2}, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ -\frac{3}{8} \end{pmatrix},$$

was unsere Aufgabe lösst.

b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{wenn } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{wenn } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

gegeben. Beweisen Sie, dass $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ existieren und, dass

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$$

Lösung: Wir berechnen zunächst die Funktion $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(0, y)$. Für $y \neq 0$ haben wir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3 y - xy^3}{x^2 + y^2}\right)\bigg|_{x=0} = \left(\frac{3x^2 y - y^3}{x^2 + y^2} - \frac{2x(x^3 y - xy^3)}{(x^2 + y^2)^2}\right)\bigg|_{x=0} = -y.$$

Um $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ zu berechnen, bemerken wir, dass

$$\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \frac{0 - 0}{x} = 0$$

für alle $x \neq 0$. Somit gilt $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ und wir haben

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -y \quad \forall\, y \in \mathbb{R}$$

gezeigt. Offensichtlich ist $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(0, y)$ differenzierbar und wir haben $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, y)\right)\Big|_{y=0} = -1$.

Um $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ zu berechnen, bemerken wir zunächst, dass für $x \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3 y - xy^3}{x^2 + y^2}\right)\bigg|_{y=0} = \left(\frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2} - \frac{2y(x^3 y - xy^3)}{(x^2 + y^2)^2}\right)\bigg|_{y=0} = x$$

gilt. Wie früher haben wir nun auch

$$\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\frac{0-0}{y}=0,$$

für alle $y \neq 0$, und somit ist $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. Insgesamt haben wir also gezeigt, dass

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)=x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Damit folgt,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)\right)\bigg|_{x=0}=1 \neq -1=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

3 Die Geometrie des Gradientes

Sei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante und sei $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nichtkonstant und differenzierbar. Nehmen Sie an, dass die Gleichung $f(x,y)=c$ eine Kurve C in der Ebene $\mathbb{R}^2$ definiert. Das heisst, es gibt ein Interval $I \subset \mathbb{R}$ und eine injektive, differenzierbare Abbildung $\gamma: I \to \mathbb{R}^2$, so dass

$$\gamma(I)=C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x,y)=c\} \tag{1}$$

und $\gamma'(t)\neq 0$ für alle $t \in I$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) ∇f steht senkrecht zu C. Dass heisst, für jede $t \in I$ ist $\nabla f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)=0$.

Lösung: Wegen (1) ist die Komposition $I \ni t \mapsto f\circ\gamma(t)$ eine konstante Funktion. Somit ist $\frac{d}{dt}f\circ\gamma(t)=0$. Wir wenden nun die Kettenregel an:

$$0=\frac{d}{dt}f\circ\gamma(t)=df(\gamma(t))\gamma'(t)=\nabla f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t), \quad \forall\, t \in I.$$

Das heisst genau, dass ∇f senkrecht zu C steht.

b) Die Richtungsableitung von f in Richtung C verschwindet. Dass heisst, $D_{\gamma'(t)}f(\gamma(t))=0$ für alle $t \in I$.

Lösung: Da f differenzierbar ist haben wir

$$D_{\gamma'(t)}f(\gamma(t))=df(\gamma(t))\gamma'(t)=\nabla f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)=0,$$

wo wir a) benutzen.

c) Die Richtungsableitung von f ist am grössten in einer Richtung senkrecht zu C.

Lösung: Sei $t \in I$ und sei $v \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v\|=1$. Sei auch n ein Vektor mit $\|\mathsf{n}\|=1$ und $\mathsf{n}\cdot\gamma'(t)=0$. Also, n ist einen Normalenvektor zu C im Punkt $\gamma(t)\in C$. Nun bildet $\{\gamma'(t),\mathsf{n}\}$ eine Basis für $\mathbb{R}^2$ und somit gibt es $a,b\in\mathbb{R}$ so, dass

$$v=a\gamma'(t)+b\mathsf{n}.$$

Da $\gamma'(t)\perp\mathsf{n}$, gibt Pythagoras $1=|v|=|a||\gamma'(t)|+|b||\mathsf{n}|=|a||\gamma'(t)|+|b|$, und somit ist $|b|\leq 1$ mit $|b|=1$ genau dann, wenn $v=\pm\mathsf{n}$. Da auch $\nabla f(\gamma(t))\perp\gamma'(t)$, haben wir nun

$$\begin{aligned}D_v f(\gamma(t))&=\nabla f(\gamma(t))\cdot v=\nabla f(\gamma(t))\cdot(a\gamma'(t)+b\mathsf{n})\\&=b\nabla f(\gamma(t))\cdot\mathsf{n}=bD_{\mathsf{n}}f(\gamma(t))\leq\max\{D_{\mathsf{n}}f(\gamma(t)),D_{-\mathsf{n}}f(\gamma(t))\}.\end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung.

4 Tangentialebenen

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch
$$f(x, y) = \sin(x) - y^3 + y^2$$
gegeben.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene von der Fläche
$$\mathcal{G}(f) := \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3$$
im Punkt $(0, 3, f(0, 3)) = (0, 3, -18)$.

Lösung: Zunächst berechnen wir
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos(x), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -3y^2 + 2y \tag{2}$$
und somit haben wir
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 3) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 3) = -3 \cdot 9 + 2 \cdot 3 = 3(2 - 9) = -21.$$
Eine Parametrisierung der Fläche $\mathcal{G}(f)$ ist durch $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,
$$F(x, y) = (x, y, f(x, y))$$
gegeben. Somit ist eine Basis der Tangentialebene von $\mathcal{G}(f)$ im Punkt $(0, 3, -18)$ durch
$$v := dF(0, 3)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \ u := dF(0, 3)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$
gegeben. Das Differential $dF(0, 3)$ können wir nun berechnen:
$$dF(0, 3) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, 3) & \frac{\partial f}{\partial y}(0, 3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & -21\end{pmatrix}.$$
Wir haben also
$$v = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \ u = \begin{pmatrix}0\\1\\-21\end{pmatrix} \Rightarrow v \times u = \begin{pmatrix}-1\\21\\1\end{pmatrix}$$
Das heisst, ein Punkt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ liegt in der gesuchten Ebene genau dann, wenn
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\-18\end{pmatrix} + w$$
wobei w die Bedingung $w \cdot (v \times u) = 0$ erfüllt. Also genau dann, wenn
$$0 = (v \times u) \cdot \begin{pmatrix}x\\y-3\\z+18\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\21\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\y-3\\z+18\end{pmatrix} = -x + 21y - 3 \cdot 21 + z + 18.$$
Somit ist die Gleichung der Tangentialebene
$$-x + 21y + z = 45.$$

b) Bestimmen Sie eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so dass der Vektor

$$\begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

senkrecht zur Fläche $\mathcal{G}(f)$ am Punkt $(\frac{\pi}{2}, 0, 0) \in \mathcal{G}(f)$ steht.

Lösung: Aus (2) folgt, dass

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\tfrac{\pi}{2}, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\tfrac{\pi}{2}, 0) = 0$$

und somit folgt, wie in a), dass eine Basis der Tangentialebene von $\mathcal{G}(f)$ in $(\frac{\pi}{2}, 0, 0)$ durch

$$v := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; u := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Da

$$v \times u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

senkrecht zur Fläche $\mathcal{G}(f)$ im Punkt $(\frac{\pi}{2}, 0, 0)$ steht, folgt dass $c = 0$.