1 Multiple Choice Fragen

a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) = e^{xy}(\sin(x) + 3\cos(xy))$$

definiert. Was ist die Hesse-Matrix von f an der Stelle $(x, y) = (0, 1)$?

☐ $$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

☐ $$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

☐ $$\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

☐ $$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Sei L eine Niveaulinie einer stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, und sei z_0 ein regulärer Punkt[1] von L mit Gradient $\nabla f(z_0)$.

☐ Der Gradient von f ist parallel zur Tangente an L in z_0.

☐ Der Gradient ist nie parallel zur Tangente, aber alle anderen Richtungen sind möglich.

☐ Der Gradient steht senkrecht auf der Tangente.

2 Der Gradient

Für welche $a \in \mathbb{R}$ gibt es eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, so dass

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \log(1 + x^2) + ay^2 \\ xy + y^2 \\ z^3 \end{pmatrix}? \tag{1}$$

3 Taylorannäherungen

a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$$

definiert. Bestimmen Sie die Taylorannäherung dritter Ordnung von f am Ursprung.

b) Sei $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) = e^x \log(y)$$

definiert. Nähern Sie den Wert von f an der Stelle $(0,102; 1,121)$ an mit hilfe von einer Taylorannäherung erster Ordnung.

[1] *Regulär* heisst, dass $\nabla f(z_0) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4 Annäherung eines Quadrates

Bestimmen Sie ein Quadrat um den Punkt $(r_0, h_0) = (5, 12) \in \mathbb{R}^2$, so dass der Wert von $V = \pi r^2 h$ in diesem Quadrat nicht mehr als $\pm 0,1$ von $\pi \cdot 5^2 \cdot 12$ abweicht.

Eine englische Version dieser Übungsserie finden Sie auf der nächsten Seite

5 Multiple Choice Questions

a) Let $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be defined by

$$f(x, y) = e^{xy}(\sin(x) + 3\cos(xy)).$$

What is the Hessian of f at the point $(x, y) = (0, 1)$?

☐
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

☐
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

☐
$$\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

☐
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Let L be a level set of a continuously differentiable function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, and let z_0 be a regular point[2] of L with gradient $\nabla f(z_0)$. Which of the following is true?

- ☐ The gradient of f is parallel to tangents of L at z_0.
- ☐ The gradient is never parallel to tangents, but all other directions are possible.
- ☐ The gradient is perpendicular to tangents of L.

6 The Gradient

For which $a \in \mathbb{R}$ does there exist a function $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ satisfying

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \log(1 + x^2) + ay^2 \\ xy + y^2 \\ z^3 \end{pmatrix}? \tag{2}$$

7 Taylorapproximations

a) Let $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be given by

$$f(x, y) = \cos(x^2 + y^2).$$

Determine the Taylorapproximation of third order of f at the origin.

b) Let $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} \to \mathbb{R}$ be defined by

$$f(x, y) = e^x \log(y).$$

Approximate the value of f at the point $(0,102; 1,121)$, using a first order Taylorapproximation.

[2] *Regular* means that $\nabla f(z_0) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

8 Approximation of a square

Determine a square (with sides of equal lengths) around the point $(r_0, h_0) = (5, 12) \in \mathbb{R}^2$, such that the value of $V = \pi r^2 h$ in this square does not deviate more than $\pm 0,1$ from $\pi \cdot 5^2 \cdot 12$.