1 Multiple Choice Fragen

a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) = e^{xy}(\sin(x) + 3\cos(xy))$$

definiert. Was ist die Hesse-Matrix von f an der Stelle $(x, y) = (0, 1)$?

☐

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

☑

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung: Wegen der Produktregel haben wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= ye^{xy}(\sin(x) + 3\cos(xy)) + e^{xy}(\cos(x) - 3y\sin(xy)) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= xe^{xy}(\sin(x) + 3\cos(xy)) - 3e^{xy}x\sin(xy). \end{aligned}$$

Differenzieren wir noch ein Mal finden wir, dass

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x, y) =& y^2 e^{xy}(\sin(x) + 3\cos(xy)) + ye^{xy}(\cos(x) - 3y\sin(xy)) \\ &+ ye^{xy}(\cos(x) - 3y\sin(xy)) + e^{xy}(-\sin(x) - 3y^2\cos(xy)) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) =& \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = (e^{xy} + xye^{xy})(\sin(x) + 3\cos(xy)) - 3yxe^{xy}\sin(xy) \\ &+ xe^{xy}(\cos(x) - 3y\sin(xy)) - 3e^{xy}(\sin(xy) + xy\cos(xy)) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x, y) =& x^2 e^{xy}(\sin(x) + 3\cos(xy)) - 3x^2 e^{xy}\sin(xy) - 3e^{xy}x^2(\sin(xy) + \cos(xy)) \end{aligned}$$

Setzen wir $(x, y) = (0, 1)$, bekommen wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(0, 1) =& 3 + 1 + 1 - 3 = 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 1) =& \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 1) = 3 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(0, 1) =& 0. \end{aligned}$$

Somit ist die gesuchte Hesse-Matrix

$$\left. \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} \end{pmatrix} \right|_{(x,y)=(0,1)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

☐

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

☐
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Sei L eine Niveaulinie einer stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, und sei z_0 ein regulärer Punkt[1] von L mit Gradient $\nabla f(z_0)$.

☐ Der Gradient von f ist parallel zur Tangente an L in z_0.

☐ Der Gradient ist nie parallel zur Tangente, aber alle anderen Richtungen sind möglich.

☑ Der Gradient steht senkrecht auf der Tangente.

Lösung: Sei v ein Tangentialvektor von L an der Stelle z_0. Dann gibt es eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to L \subset \mathbb{R}^2$, so dass $\gamma(0) = z_0$ und $\gamma'(0) = v$. Da $\gamma(-\epsilon, \epsilon) \subset L$ ist die Funktion $(-\epsilon, \epsilon) \ni t \mapsto f \circ \gamma(t)$ konstant. Somit gilt

$$0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f \circ \gamma(t) = \nabla f(z_0) \cdot v.$$

Somit steht $\nabla f(z_0)$ senkrecht auf v.

2 Der Gradient

Für welche $a \in \mathbb{R}$ gibt es eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, so dass

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \log(1 + x^2) + ay^2 \\ xy + y^2 \\ z^3 \end{pmatrix}? \tag{1}$$

Lösung: Die Bedingung (1) können wir als

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= \log(1 + x^2) + ay^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= xy + y^2 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= z^3 \end{aligned}$$

schreiben. Nehmen wir an, dass f eine Lösung dieses Systems ist, dann folgt aus diesen drei Bedingungen, dass

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \int_0^x \log(1 + t^2)dt + axy^2 + h_1(y, z) \\ f(x, y, z) &= \frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{3} + h_2(x, z) \\ f(x, y, z) &= \frac{z^4}{4} + h_3(x, y). \end{aligned}$$

[1] *Regulär* heisst, dass $\nabla f(z_0) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Wenn wir $z = 0$ setzen, bekommen wir

$$h_3(x,y) = \frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{3} + h_2(x,0) = \int_0^x \log(1+t^2)dt + axy^2 + h_1(y,0). \tag{2}$$

Daraus folgt, dass $axy^2 = \frac{xy^2}{2}$ und somit ist $a = \frac{1}{2}$ die einzige Möglichkeit. Um die Aufgabe zu lösen, müssen wir nur noch für dieses a ein f bestimmen, so dass (1) erfüllt ist. Aus (2) folgt, dass

$$h_2(x,0) = \int_0^x \log(1+t^2)dt$$

und somit haben wir

$$f(x,y,z) = \frac{z^4}{4} + h_3(x,y) = \frac{z^4}{4} + \frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \int_0^x \log(1+t^2)dt + C$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$. Nun kontrolliert man sofort, dass dieses f (1) erfüllt mit $a = \frac{1}{2}$.

3 Taylorannäherungen

a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = \cos(x^2 + y^2)$$

definiert. Bestimmen Sie die Taylorannäherung dritter Ordnung von f am Ursprung.

Lösung: Erinnern Sie sich, dass die Taylorannäherung dritter Ordnungs einer Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ am $a \in \mathbb{R}^n$ ist durch

$$\begin{aligned} F(x) \approx &F(a) + \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial F}{\partial x_k}(a)(x_k - a_k) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_k}(a)(x_k - a_k)(x_j - a_j) \\ &+ \frac{1}{6}\sum_{l=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^3 F}{\partial x_l \partial x_j \partial x_k}(a)(x_k - a_k)(x_j - a_j)(x_l - a_l) \end{aligned}$$

gegeben. Hier schreiben wir $x = (x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$ für einen Vektor in $\mathbb{R}^n$. In unserem Fall ist $a = (0,0)$ und somit ist unsere Annäherung

$$\begin{aligned} f(x,y) \approx &f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(0,0)x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(0,0)y^2\right) \\ &+ \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial^3 x}(0,0)x^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial^2 x}(0,0)yx^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial^2 x \partial y}(0,0)x^2 y + \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(0,0)xy^2\right. \\ &\left.+ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(0,0)x^2 y + \frac{\partial^3 f}{\partial^2 y \partial x}(0,0)xy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial^2 y}(0,0)xy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial^3 y}(0,0)y^3\right). \end{aligned}$$

Wir müssen nun diese Partielle Ableitungen berechnen. Wir sehen zunächst, dass

$$
\begin{aligned}
f(0,0) &= 1 \\
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= -2x\sin(x^2+y^2)|_{(x,y)=(0,0)} = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= -2y\sin(x^2+y^2)|_{(x,y)=(0,0)} = 0.
\end{aligned}
$$

Wegen der Produktregel folgt aus diesen Ergebnissen, dass alle höreren zweiten und dritten Ordnungs Ableitungen am Ursprung verschwinden. Somit ist unsere Annäherung

$$f(0,0) \approx 1.$$

b) Sei $f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = e^x \log(y)$$

definiert. Nähern Sie den Wert von f an der Stelle $(0,102; 1,121)$ an mit hilfe von einer Taylorannäherung erster Ordnung.

Lösung: Wir haben

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \log(y) \\ \frac{e^x}{y} \end{pmatrix}$$

und somit ist

$$\nabla f(0;1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nun gilt $(0,102; 1,121) \approx (0;1)$ und $(0,102; 1,121) - (0;1) \approx (0,102; 0,121)$. Somit haben wir

$$
\begin{aligned}
f(0,102; 1,121) &= f(0;1) + \nabla f(0;1) \cdot \begin{pmatrix} 0,102 \\ 0,121 \end{pmatrix} + R \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,102 \\ 0,121 \end{pmatrix} + R = 0,121 + R
\end{aligned}
$$

wobei der Rest R klein ist. Als eine gute Annäherung haben wir damit $f(0,102; 1,121) \approx 0,121$.

4 Annäherung eines Quadrates

Bestimmen Sie ein Quadrat um den Punkt $(r_0, h_0) = (5, 12) \in \mathbb{R}^2$, so dass der Wert von $V = \pi r^2 h$ in diesem Quadrat nicht mehr als $\pm 0,1$ von $\pi \cdot 5^2 \cdot 12$ abweicht.

Lösung: Wir betrachten $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ als eine Funktion $V(r,h) = \pi r^2 h$. Offensichtlich ist V stetig differenzierbar, mit

$$\nabla V(r_0, h_0) = \begin{pmatrix} 2\pi r h \\ \pi r^2 \end{pmatrix}\Bigg|_{(r,h)=(5,12)} = \begin{pmatrix} 120\pi \\ 25\pi \end{pmatrix}$$

Wir können ein Punkt (r, h) in der Nähe von (r_0, h_0) als

$$(r, h) = (r_0 + \Delta r, h_0 + \Delta h)$$

schreiben. Dann haben wir

$$V(r, h) \approx V(r_0, h_0) + \nabla V(r_0, h_0) \cdot \begin{pmatrix} \Delta r \\ \Delta h \end{pmatrix} = V(r_0, h_0) + 120\pi\Delta r + 25\pi\Delta h$$

Da wir ein Quadrat bestimmen möchten, können wir $\Delta h = \Delta r$ setzen und müssen dann diesen Wert bestimmen, so dass

$$0,1 \geq |V(r, h) - V(r_0, h_0)| \approx |120\pi\Delta r + 25\pi\Delta h| = |145\pi\Delta r| = 145\pi|\Delta r|$$

Somit wählen wir $|\Delta h| = |\Delta r| \leq \frac{0,1}{145\pi} \leq \frac{0,1}{145 \cdot 3,14} \lesssim 2,1 \cdot 10^{-4}$. Dies löst die Übung.