1 Multiple Choice Fragen

a) Welche der folgenden Aussagen über die Niveaulinien[1] einer C^1-Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist korrekt?

- ☐ Eine Niveaulinie kann nie sich selbst schneiden.
- ☐ Niveaulinien zu verschiedenen Niveaus können sich schneiden, aber nur in singulären Punkten.
- ☐ Jeder Punkt liegt auf genau einer Niveaulinie.
- ☐ Jede Niveaulinie geht durch genau einen Punkt.

b) Für den Gradient der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gilt

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Welche der folgenden Aussagen gilt?

- ☐ f ist konstant.
- ☐ f ist konstant auf allen Ebenen im $\mathbb{R}^3$, die durch die Gleichung

$$2x + 4y + z = d, \tag{1}$$

  für ein $d \in \mathbb{R}$, gegeben sind. Das heisst, es gibt eine Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass $f(x,y,z) = F(2x+4y+z)$ für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
- ☐ f hängt nur von x ab.
- ☐ Die Niveauflächen von f sind Ebenen, parallel zur (x,y) Ebene.

2 Extremalwerte I

Wir betrachten das Dreieck

$$\Delta := \{(x,y) \in [0,9]^2 \mid y \leq 9 - x\}.$$

Sei $f : \Delta \to \mathbb{R}$ die Funktion, die durch

$$f(x,y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$$

gegeben ist. Bestimmen Sie das absolute Maximum und Minimum von f.

[1] Die Niveaulinie von f mit Niveau $c \in \mathbb{R}$ ist die Teilmenge $f^{-1}(\{c\}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = c\}$ von $\mathbb{R}^2$.

3 Extremalwerte II

Sei $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$ die Ebene, die durch

$$-\frac{x}{3} - \frac{2y}{3} = z$$

definiert ist. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = 10 - x^2 - y^2$$

und sei $\Omega := \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y) \geq -\frac{x}{3} - \frac{2y}{3}\} \subset \mathbb{R}^3$ die Menge der Punkte aus dem Graphen von f, die "höher" als $\mathcal{E}$ liegen. Bestimmen Sie den *maximalen* Abstand

$$\max_{p \in \Omega} \operatorname{dist}(p, \mathcal{E}) \tag{2}$$

von Ω bis $\mathcal{E}$. Hier bezeichnet $\operatorname{dist}(p, \mathcal{E})$ den Abstand von p zu $\mathcal{E}$.

4 Extremalwerte III

Sei $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$. Wir definieren $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \frac{a \cdot x}{|x|^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

wobei "$\cdot$" das Skalarprodukt bezeichnet.

a) Beweisen Sie, dass f ein globales Maximum und ein globales Minimum annimmt.

b) Berechnen Sie die globalen Extremalwerte von f.

Eine englische Version dieser Übungsserie finden Sie auf der nächsten Seite

5 Multiple Choice Questions

a) Which of the following statements about the level sets[2] of a C^1 function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is correct?

- ☐ A level set can never intersect itself.
- ☐ Level sets corresponding to different levels can intersect, but only at singular points.
- ☐ Every point lies in exactly one level set.
- ☐ Every level set goes through exactly one point.

b) The gradient of the function $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ is given by

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Which of the following statements is true?

- ☐ f is constant.
- ☐ f is constant on all planes in $\mathbb{R}^3$, which are given by

$$2x + 4y + z = d, \tag{3}$$

for some $d \in \mathbb{R}$. In particular, there exists a function $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so that $f(x, y, z) = F(2x + 4y + z)$ for every $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- ☐ f only depends on x.
- ☐ The level sets of f are planes which are parallel to the (x, y) plane.

6 Extrema I

Consider the triangle

$$\Delta := \{(x, y) \in [0, 9]^2 \mid y \leq 9 - x\}.$$

Let $f : \Delta \to \mathbb{R}$ denote the function defined by

$$f(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$$

Determine the absolute maximum and minimum of f.

[2] The level set f with level $c \in \mathbb{R}$ is the subset $f^{-1}(\{c\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\}$ of $\mathbb{R}^2$.

7 Extrema II

Let $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$ denote the plane defined by

$$-\frac{x}{3} - \frac{2y}{3} = z$$

Let $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = 10 - x^2 - y^2$$

and let $\Omega := \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y) \geq -\frac{x}{3} - \frac{2y}{3}\} \subset \mathbb{R}^3$ denote the set of points on the graph of f, which lie "above" $\mathcal{E}$. Determine the *maximal* distance

$$\max_{p \in \Omega} \operatorname{dist}(p, \mathcal{E}) \tag{4}$$

from Ω to $\mathcal{E}$. Here $\operatorname{dist}(p, \mathcal{E})$ denotes the distance from p to $\mathcal{E}$.

8 Extrema III

Let $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$. We define $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ by

$$f(x) = \frac{a \cdot x}{|x|^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

where "$\cdot$" denotes the usual scalarproduct.

a) Prove that f attains its global maximum and global minimum.

b) Compute the global extrema of f.