1 Multiple Choice Fragen

a) Welche der folgenden Aussagen über die Niveaulinien[1] einer C^1-Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist korrekt?

- ☐ Eine Niveaulinie kann nie sich selbst schneiden.
- ☐ Niveaulinien zu verschiedenen Niveaus können sich schneiden, aber nur in singulären Punkten.
- ☑ Jeder Punkt liegt auf genau einer Niveaulinie.
  Lösung: Der Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ liegt nur auf der Niveaulinie $f^{-1}(\{f(x, y)\})$.
- ☐ Jede Niveaulinie geht durch genau einen Punkt.

b) Für den Gradient der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gilt

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Welche der folgenden Aussagen gilt?

- ☐ f ist konstant.
- ☑ f ist konstant auf allen Ebenen im $\mathbb{R}^3$, die durch die Gleichung

$$2x + 4y + z = d, \tag{1}$$

für ein $d \in \mathbb{R}$, gegeben sind. Das heisst, es gibt eine Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass $f(x, y, z) = F(2x + 4y + z)$ für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Lösung: Sei $d \in \mathbb{R}$. Die Ebene in $\mathbb{R}^3$, die dann durch (1) gegeben ist, nennen wir $\mathcal{F}(d)$. Bemerken Sie, dass $p = (x, y, z) \in \mathcal{F}(d)$ genau dann, wenn

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot p = 2x + 4y + z = d.$$

Wir möchten zeigen, dass $f(p_1) = f(p_2)$ für alle $p_1 \neq p_2 \in \mathcal{F}(d)$. Wir sehen, dass die Ableitung der Kurve $\gamma(t) = tp_2 + (1 - t)p_1$, $t \in \mathbb{R}$, die Gleichung

$$\gamma'(t) = p_2 - p_1 \quad \forall\ t \in \mathbb{R}$$

erfüllt. Somit ist

$$\begin{aligned} f(p_2) - f(p_1) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f \circ \gamma(t) dt = \int_0^1 \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (p_2 - p_1) dt = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot p_2 - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot p_1 = d - d = 0, \end{aligned}$$

was die Behauptung zeigt.
- ☐ f hängt nur von x ab.
- ☐ Die Niveauflächen von f sind Ebenen, parallel zur (x, y) Ebene.

[1] Die Niveaulinie von f mit Niveau $c \in \mathbb{R}$ ist die Teilmenge $f^{-1}(\{c\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\}$ von $\mathbb{R}^2$.

2 Extremalwerte I

Wir betrachten das Dreieck

$$\Delta := \{(x, y) \in [0, 9]^2 \mid y \leq 9 - x\}.$$

Sei $f : \Delta \to \mathbb{R}$ die Funktion, die durch

$$f(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$$

gegeben ist. Bestimmen Sie das absolute Maximum und Minimum von f.
Lösung: Wir müssen Punkte auf dem Rand $\partial\Delta$ kontrollieren und Punkte die im Inneren $\Delta \backslash \partial\Delta$ von Δ liegen.
$\underline{\Delta \backslash \partial\Delta}$: Ein Punkt $(x_0, y_0) \in \Delta \backslash \partial\Delta$ kann nur ein Maximum/Minimum sein, wenn

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir haben

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 - 2x \\ 2 - 2y \end{pmatrix}$$

und somit ist der einzige kritische Punkt $(1, 1) \in \Delta \backslash \partial\Delta$. Wir haben $f(1, 1) = 4$.
$\underline{\partial\Delta}$: Der Rand von Δ besteht aus drei Teilen

$$L_1 := \Delta \cap \{y = 0\}, \quad L_2 := \Delta \cap \{x = 0\}, \quad L_3 := \Delta \cap \{y = 9 - x\}.$$

Wir müssen alle drei Teile untersuchen. Eine Parametrisierung von L_1 ist durch $\gamma_1(t) = (t, 0)$, $t \in [0, 9]$ gegeben. Nun haben wir

$$f \circ \gamma_1(t) = 2 + 2t - t^2$$
$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma_1)(t) = 2 - 2t.$$

Der einzige kritische Punkt dieser Funktion auf dem Interval $(0, 9)$ ist damit $t = 1$, und wir haben $f(1, 0) = f(\gamma_1(1)) = 3$.

Eine Parametrisierung von L_2 ist durch $\gamma_2(t) = (0, t)$, $t \in [0, 9]$ gegeben. Wir haben

$$f \circ \gamma_2(t) = 2 + 2t - t^2$$
$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma_1)(t) = 2 - 2t.$$

Der einzige kritische Punkt dieser Funktion auf dem Interval $(0, 9)$ ist somit noch einmal $t = 1$ und wir haben $f(0, 1) = f(\gamma_2(1)) = 3$.

Eine Parametrisierung von L_3 ist durch $\gamma_3(t) = (t, 9 - t)$, $t \in [0, 9]$ gegeben. Wir haben

$$f \circ \gamma_3(t) = 2 + 2t + 2(9 - t) - t^2 - (9 - t)^2$$
$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma_1)(t) = 2 - 2 - 2t + 2(9 - t) = -4t + 18$$

Der einzige kritische Punkt dieser Funktion auf dem Interval $(0,9)$ ist $t = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$ und wir haben

$$f(\tfrac{9}{2},\tfrac{9}{2}) = f(\gamma_3(\tfrac{9}{2})) = 2+9+9-2\left(\frac{9}{2}\right)^2 = -\frac{41}{2}.$$

Nun fehlen noch die drei Ecken von Δ. An diesen Stellen haben wir

$$f(0,0) = 2, \quad f(0,9) = -61, \quad f(9,0) = -61.$$

Wir haben nun alle potentiellen Maxima- und Minimastellen gefunden und wir sehen, dass f sein Maximum $\max_\Delta f = 4$ nur an der Stelle $(1,1)$ annimmt. Wir sehen auch, dass sie ihr Minimum $\min_\Delta f = -61$ genau an den Stellen $(0,9)$ und $(9,0)$ annimmt.

3 Extremalwerte II

Sei $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$ die Ebene, die durch

$$-\frac{x}{3} - \frac{2y}{3} = z$$

definiert ist. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = 10 - x^2 - y^2$$

und sei $\Omega := \{(x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y) \geq -\frac{x}{3} - \frac{2y}{3}\} \subset \mathbb{R}^3$ die Menge der Punkte aus dem Graphen von f, die "höher" als $\mathcal{E}$ liegen. Bestimmen Sie den *maximalen* Abstand

$$\max_{p\in\Omega} \operatorname{dist}(p,\mathcal{E}) \tag{2}$$

von Ω bis $\mathcal{E}$. Hier bezeichnet $\operatorname{dist}(p,\mathcal{E})$ den Abstand von p zu $\mathcal{E}$.
Lösung: Wir bemerken zunächst, dass

$$f(x,y) \geq -\frac{x}{3} - \frac{2y}{3} \Leftrightarrow x(x-\tfrac{1}{3}) + y(y-\tfrac{2}{3}) \leq 10$$

mit Gleichheitszeichen genau dann, wenn $p = (x,y,f(x,y)) \in \mathcal{E}$ (oder $\operatorname{dist}(p,\mathcal{E}) = 0$). Somit ist

$$\Omega = \{(x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 \mid x(x-\tfrac{1}{3}) + y(y-\tfrac{2}{3}) \leq 10\}.$$

Man sieht, dass

$$\mathrm{n} := \frac{3}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\1\end{pmatrix}$$

ein Einheitsnormalenvektor zu $\mathcal{E}$ ist. Für $p = (x,y,z) \in \Omega$ gilt nun

$$\operatorname{dist}(p,\mathcal{E}) = \frac{3}{\sqrt{14}}\left|\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\1\end{pmatrix}\right| = \frac{|x+2y+3z|}{\sqrt{14}}.$$

Um das Maximum (2) zu bestimmen müssen wir somit das Maximum von $\frac{|x+2y+3f(x,y)|}{\sqrt{14}}$ in der Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x(x-\frac{1}{3}) + y(y-\frac{2}{3}) \leq 10\}$ bestimmen. Wenn $x(x-\frac{1}{3}) + y(y-\frac{2}{3}) = 10$ gilt $(x,y,f(x,y)) \in \mathcal{E}$ und deswegen folgt $\frac{|x+2y+3f(x,y)|}{\sqrt{14}} = \operatorname{dist}((x,y,f(x,y)),\mathcal{E}) = 0$. Somit reicht es das Maximum von $\frac{|x+2y+3f(x,y)|}{\sqrt{14}}$ in der Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x(x-\frac{1}{3}) + y(y-\frac{2}{3}) < 10\}$ zu bestimmen. Diese Funktion ist der Betrag von der Funktion

$$G(x,y) = \frac{x + 2y + 30 - 3x^2 - 3y^2}{\sqrt{14}}$$

und somit reicht es, die Extrema von G zu bestimmen. G ist differenzierbar mit Gradient

$$\nabla G(x,y) = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1-6x \\ 2-6y \end{pmatrix}$$

und deswegen ist der einzige kritische Punkt von G der Punkt $(x_0,y_0) = (\frac{1}{6},\frac{1}{3})$. Da

$$x_0(x_0-\tfrac{1}{3}) + y_0(y_0-\tfrac{2}{3}) = \tfrac{1}{6}(\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{3}) + \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{3}-\tfrac{2}{3}) = -\tfrac{1}{36} - \tfrac{1}{9} < 10,$$

ist (x_0,y_0) in der gesuchte Menge und man kontrolliert, dass die Hesse Matrix von G an der Stelle (x_0,y_0) negativ definit ist. Es folgt, dass

$$\max_{p\in\mathcal{F}} \operatorname{dist}(p,\mathcal{E}) = \frac{|x_0 + 2y_0 + 3f(x_0,y_0)|}{\sqrt{14}} = \frac{183}{6\sqrt{14}} \approx 8,15$$

was die Aufgabe löst.

4 Extremalwerte III

Sei $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$. Wir definieren $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \frac{a \cdot x}{|x|^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

wobei "$\cdot$" das Skalarprodukt bezeichnet.

a) Beweisen Sie, dass f ein globales Maximum und ein globales Minimum annimmt.

Lösung: Wir sehen sofort, dass $f(a) = \frac{|a|^2}{|a|^2+1} > 0$ und $f(-a) = \frac{-|a|^2}{|a|^2+1} < 0$. Wir bermerken auch, dass

$$0 \leq |f(x)| \leq \frac{|a||x|}{|x|^2+1} \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3}$$

Für $r > 0$ definieren wir $B(r) := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| \leq r\}$. Sei nun $r > 0$ so gross, dass $-a, a \in B(r)$. Wegen (3) gibt es für $\epsilon = \frac{|a|^2}{2(|a|^2+1)} = \frac{|f(a)|}{2} = \frac{|f(-a)|}{2}$ ein $C > 0$, so dass

$$|f(x)| < \epsilon \quad \forall\ |x| \geq C.$$

Somit folgt, dass $-a, a \in B(R)$ und

$$\min_{B(R)}(f) \leq \tfrac{f(-a)}{2} < f(v) < \tfrac{f(a)}{2} \leq \max_{B(R)}(f) \quad \forall\ v \in \mathbb{R}^n \backslash B(R), \tag{4}$$

wobei $R := \max\{r, C\}$. Da $B(R)$ kompakt ist, nimmt $f|_{B(R)}$ ihr Maximum und Minimum an. Wegen (4) folgt nun, dass diese auch globale Extrema sind.

b) Berechnen Sie die globalen Extremalwerte von f.

Lösung: Da das Maximum von f offensichtlich positiv ist, nimmt f ihr Maximum in dem Halbraum $\{x \in \mathbb{R}^r \mid x \cdot a \geq 0\}$ an. Jeden Vektor $x \in \{x \in \mathbb{R}^r \mid x \cdot a \geq 0\}$ können wir als

$$x = ta + u$$

schreiben für ein $t > 0$ und $u \in \mathbb{R}^n$ mit $a \perp u$. Dann haben wir wegen Pythagoras

$$f(x) = \frac{a \cdot x}{|x|^2 + 1} = \frac{t|a|^2}{t^2|a|^2 + |u|^2 + 1}.$$

Somit ist

$$f(x) \leq \frac{t|a|^2}{t^2|a|^2 + 1} = \frac{|a|}{2}\left(\frac{2}{t|a| + \frac{1}{t|a|}}\right) \leq \frac{|a|}{2}, \tag{5}$$

mit Gleichheitszeichen genau dann, wenn

$$u = 0 \quad \text{und} \quad \frac{2}{t|a| + \frac{1}{t|a|}} = 1.$$

Da $t|a| > 0$, ist die zweite von diesen Bedingungen genau dann erfüllt, wenn

$$\begin{aligned} 2 = t|a| + \frac{1}{t|a|} &\Leftrightarrow 2t|a| = (t|a|)^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow 0 = (t|a|)^2 + 1 - 2t|a| = (t|a| - 1)^2 \\ &\Leftrightarrow t|a| = 1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{|a|}. \end{aligned}$$

Es folgt, dass wir Gleichheitszeichen in (5) genau dann haben, wenn

$$u = 0 \quad \text{und} \quad t = \frac{1}{|a|}.$$

Somit nimmt f ihr Maximum nur an der Stelle $x = u + ta = \frac{a}{|a|}$ an. Entsprechend nimmt f ihr Minimum nur an der Stelle $x = -\frac{a}{|a|}$ an.