1 Multiple Choice Fragen

a) Seien $f, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Nehmen Sie an, dass es zwei Punkte $a, b \in \mathbb{R}^2$ gibt, so dass

$$h(a) = f(a) = b, \quad h(b) = f(b) = a$$

und

$$df(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad dh(a) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad df(b) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad dh(b) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Welche der folgenden Aussagen gilt?

☐
$$d(h \circ f)(a) = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad d(f \circ f)(b) = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$$

☐
$$d(h \circ f)(a) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad d(f \circ f)(b) = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

☐
$$d(f \circ h)(b) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad d(h \circ h)(a) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

☐
$$d(f \circ h)(b) = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}, \quad d(h \circ h)(a) = \begin{pmatrix} 1 & 14 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$$

b) Beschreiben Sie die Bewegung eines Punktes mit folgender Parametrisierung

$$[0, \tfrac{\pi}{3}] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -\sin(6t) \\ \cos(6t) \end{pmatrix}$$

☐ Kreisbahn mit Mittelpunkt $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ und Radius 2, einmaliger Umlauf im Uhrzeigersinn beginnend bei $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$.

☐ Kreisbahn mit Mittelpunkt $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ und Radius 2, zweimaliger Umlauf gegen den Uhrzeigersinn beginnend bei $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$.

☐ Auf einer ellipse mit Mittelpunkt $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ von $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

☐ Kreisbahn mit Mittelpunkt $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ und Radius 2, einmaliger Umlauf gegen den Uhrzeigersinn beginnend bei $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$.

2 Extrema I

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der folgenden Funktionen und klassifizieren Sie sie mittels der Hessematrix.

a) $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$

b) $f(x,y) = 1 + x^2 - y^2$

c) $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-\log(x^2+y^2)}$, $(x,y) \neq (0,0)$

d) $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$

3 Die Kettenregel (Eulers Satz für homogene Funktionen)

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und homogen im Sinne von

$$f(tx) = t^p f(x) \quad \forall\, t > 0,\; x \in \mathbb{R}^n,$$

für ein $p \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass

$$x \cdot \nabla f(x) = pf(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

4 Extrema II

Seien $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m) \in \mathbb{R}^2$ m Punkte in der Ebene. Wir definieren $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{m} \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} \right|^2 .$$

Beweisen Sie, dass f ein Minimum hat an der Stelle

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} . \tag{2}$$

TIPP: Zunächst muss man die kritischen Punkte von f bestimmen und ein lokales Minimum finden. Dann muss man sich überlegen warum dies auch ein globales Minimum ist.

Eine englische Version dieser Übungsserie finden Sie auf der nächsten Seite

5 Multiple Choice Questions

a) Let $f, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ be continuously differentiable. Assume that there are two points $a, b \in \mathbb{R}^2$ for which

$$h(a) = f(a) = b, \quad h(b) = f(b) = a$$

and

$$df(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad dh(a) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad df(b) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad dh(b) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Which of the following are true?

☐
$$d(h \circ f)(a) = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad d(f \circ f)(b) = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$$

☐
$$d(h \circ f)(a) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad d(f \circ f)(b) = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

☐
$$d(f \circ h)(b) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad d(h \circ h)(a) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

☐
$$d(f \circ h)(b) = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}, \quad d(h \circ h)(a) = \begin{pmatrix} 1 & 14 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$$

b) Which of the following statements describe the motion of a point having the parametrization

$$[0, \tfrac{\pi}{3}] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -\sin(6t) \\ \cos(6t) \end{pmatrix}?$$

☐ Circles centered at $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ with radius 2, rotating once in clockwise direction starting at $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$.

☐ Circles centered at $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ with radius 2, rotating twice in anticlockwise direction starting at $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$.

☐ On an ellipse centered at $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ from $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ to $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

☐ Circles centered at $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ with radius 2, rotating once in anticlockwise direction starting at $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$.

6 Extremal points I

Determine all critical points of the following functions and classify them using the Hessian.

a) $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$

b) $f(x,y) = 1 + x^2 - y^2$

c) $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-\log(x^2+y^2)}$, $(x,y) \neq (0,0)$

d) $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$

7 The chain rule (Euler's theorem for homogenuous functions)

Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be continuous differentiable and homogenuous in the sense that

$$f(tx) = t^p f(x) \quad \forall\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n,$$

for some $p \in \mathbb{N}$. Prove that

$$x \cdot \nabla f(x) = pf(x) \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

8 Extremal points II

Let $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m) \in \mathbb{R}^2$ be m points in the plane. We define $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ by

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{m} \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} \right|^2 .$$

Prove that f has a minimum at the point

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}. \tag{4}$$

HINT: First one needs to determine the critical points of f in order to find a local minimum. Then one needs to consider why this is also a global minimum.