1 Multiple Choice Fragen

a) Seien $f, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Nehmen Sie an, dass es zwei Punkte $a, b \in \mathbb{R}^2$ gibt, so dass

$$h(a) = f(a) = b, \quad h(b) = f(b) = a$$

und

$$df(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad dh(a) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad df(b) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad dh(b) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Welche der folgenden Aussagen gilt?

☑
$$d(h \circ f)(a) = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad d(f \circ f)(b) = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$$

☐
$$d(h \circ f)(a) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad d(f \circ f)(b) = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

☐
$$d(f \circ h)(b) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad d(h \circ h)(a) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

☑
$$d(f \circ h)(b) = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}, \quad d(h \circ h)(a) = \begin{pmatrix} 1 & 14 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$$

Lösung: Man wendet die Kettenregel an. Z.B. $d(f \circ h)(b) = df(h(b))dh(b) = df(a)dh(b)$.

b) Beschreiben Sie die Bewegung eines Punktes mit folgender Parametrisierung

$$[0, \tfrac{\pi}{3}] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -\sin(6t) \\ \cos(6t) \end{pmatrix}$$

☐ Kreisbahn mit Mittelpunkt $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ und Radius 2, einmaliger Umlauf im Uhrzeigersinn beginnend bei $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$.

☐ Kreisbahn mit Mittelpunkt $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ und Radius 2, zweimaliger Umlauf gegen den Uhrzeigersinn beginnend bei $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$.

☐ Auf einer ellipse mit Mittelpunkt $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ von $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

☑ Kreisbahn mit Mittelpunkt $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ und Radius 2, einmaliger Umlauf gegen den Uhrzeigersinn beginnend bei $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$.

2 Extrema I

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der folgenden Funktionen und klassifizieren Sie sie mittels der Hessematrix.

a) $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$

Lösung: Wir haben

$$0 = \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2(y-1) \end{pmatrix} \Leftrightarrow (x,y) = (0,1).$$

Da die Hessematrix

$$H(f;(0,1)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

an der Stelle $(0,1)$ positiv definit ist, ist der einzige kritische Punkt $(0,1)$ ein lokales Minimum.

b) $f(x,y) = 1 + x^2 - y^2$

Lösung: Wir haben

$$0 = \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} \Leftrightarrow (x,y) = (0,0).$$

Da die Hessematrix

$$H(f;(0,0)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

an der Stelle $(0,0)$ weder positiv, noch negativ definit ist, ist $(0,0)$ ein Sattelpunkt.

c) $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-\log(x^2+y^2)}$, $(x,y) \neq (0,0)$

Lösung: Für $(x,y) \neq (0,0)$ haben wir $-\log(x^2+y^2) = \log((x^2+y^2)^{-1})$ und somit gilt

$$f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-\log(x^2+y^2)} = \frac{(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} = 1$$

für alle $(x,y) \neq (0,0)$. Es folgt, dass alle Punkte $(x,y) \neq (0,0)$ kritisch sind.

d) $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$

Lösung: Wir haben

$$0 = \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x)\cos(y) \\ -\sin(x)\sin(y) \end{pmatrix} \Leftrightarrow (x,y) = \begin{cases} (k\pi + \frac{\pi}{2}, n\pi) & \text{für } k,n \in \mathbb{Z}; \\ (k\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}) & \text{für } k,n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Die Hessematrix ist durch

$$H(f;(x,y)) = \begin{pmatrix} -\sin(x)\cos(y) & -\cos(x)\sin(y) \\ -\cos(x)\sin(y) & -\sin(x)\cos(y) \end{pmatrix}$$

gegeben. Somit haben wir an der Stelle $(x_0,y_0) = (k\pi + \frac{\pi}{2}, n\pi)$, wobei $k,n \in \mathbb{Z}$:

$$H(f;(x_0,y_0)) = \begin{pmatrix} (-1)^{k+n+1} & 0 \\ 0 & (-1)^{k+n+1} \end{pmatrix}.$$

Es folgt, dass $(k\pi + \frac{\pi}{2}, n\pi)$ ein lokales Maximum ist genau dann, wenn $k+n$ gerade ist und ein lokales Minimum ist genau dann, wenn $k+n$ ungerade ist. An der Stelle $(x_0, y_0) = (k\pi, n\pi + \frac{\pi}{2})$, wobei $k, n \in \mathbb{Z}$, haben wir

$$H(f;(x_0,y_0)) = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{k+n+1} \\ (-1)^{k+n+1} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\det(H(f;(x_0,y_0))) = -(-1)^{2(k+n+1)} = -1.$$

Da $\det(H(f;(x_0,y_0)))$ das Produkt der Eigenwerte von $\det(H(f;(x_0,y_0)))$ ist, und $\det(H(f;(x_0,y_0)))$ genau zwei Eigenwerte hat, entspricht $\det(H(f;(x_0,y_0))) < 0$, dass die zwei Eigenwerte verschiedene Vorzeichen haben. Also, dass $H(f;(x_0,y_0))$ weder negativ noch positiv definit ist. Es folgt, dass f an der Stelle $(x_0,y_0) = (k\pi, n\pi + \frac{\pi}{2})$ einen Sattelpunkt hat.

3 Die Kettenregel (Eulers Satz für homogene Funktionen)

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und homogen im Sinne von

$$f(tx) = t^p f(x) \quad \forall\, t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n,$$

für ein $p \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass

$$x \cdot \nabla f(x) = pf(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Lösung: Wir zeigen (1) an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Zunächst definieren wir $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$g(t) = f(tx_0).$$

Die Kettenregel gibt nun

$$g'(1) = \nabla f(tx_0) \cdot x_0\big|_{t=1} = \nabla f(x_0) \cdot x_0.$$

Da auch $g(t) = t^p f(x_0)$, haben wir andererseits

$$g'(1) = pt^{p-1} f(x_0)\big|_{t=1} = pf(x_0).$$

Nun folgt, dass

$$\nabla f(x_0) \cdot x_0 = pf(x_0),$$

was die Behauptung zeigt.

4 Extrema II

Seien $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m) \in \mathbb{R}^2$ m Punkte in der Ebene. Wir definieren $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{m} \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} \right|^2.$$

Beweisen Sie, dass f ein Minimum hat an der Stelle

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}. \tag{2}$$

TIPP: Zunächst muss man die kritischen Punkte von f bestimmen und ein lokales Minimum finden. Dann muss man sich überlegen warum dies auch ein globales Minimum ist.

Lösung: Wir können auch f als

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{m}(x-x_k)^2 + \sum_{l=1}^{m}(y-y_l)^2$$

schreiben. Somit ist der Gradient von f

$$\nabla f(x,y) = 2\sum_{k=1}^{m}\begin{pmatrix} x-x_k \\ y-y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2mx - 2\sum_{k=1}^{m} x_k \\ 2my - 2\sum_{k=1}^{m} y_k \end{pmatrix}.$$

Es folgt, dass $0 = \nabla f(x,y)$ genau dann, wenn

$$0 = mx - \sum_{k=1}^{m} x_k \Leftrightarrow x = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x_k$$
$$0 = my - \sum_{k=1}^{m} y_k \Leftrightarrow y = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} y_k.$$

Daraus folgt, dass (2) der einzige kritische Punkt von f ist. Nun haben wir

$$H(f;(x_0,y_0)) = \begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix},$$

und somit ist (x_0, y_0) ein lokales Minimum. Wir behaupten, dass (x_0, y_0) auch ein globales Minimum ist. Um das zu zeigen, schreiben wir

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad z_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}, k = 1, \dots m.$$

Die Dreiecksungleichung gibt nun

$$|z| - |z_k| \le |z - z_k|.$$

Daraus folgt

$$|z|^2 + |z_k|^2 - 2|z||z_k| = (|z| - |z_k|)^2 \le |z - z_k|^2,$$

und wenn man über k summiert:

$$m|z|^2 + \left(\sum_{k=1}^{m} |z_k|^2\right) - 2|z|\left(\sum_{k=1}^{m} |z_k|\right) \le f(z).$$

Man sieht das die linke Seite gegen ∞ geht für $|z| \to \infty$. Das heisst, es gibt ein $C > 0$, so dass

$$f(x_0, y_0) + 1 \le f(z) \quad \forall\ |z| \ge C.$$

Es folgt, dass f ein Minimum in $\{z \in \mathbb{R}^2 \mid |z| < C\}$ haben muss, und dass dies auch ein kritische Punkt sein muss. Da es nur einen kritischen Punkt gibt, muss dies ein Minimum sein.