1 Multiple Choice Fragen

a) Sei $v : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Welche der Aussagen gilt?

☐ Es existiert ein Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ mit $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$, so dass

$$\int_\gamma v \; d\gamma < 0$$

☐ $v = \nabla f$ für eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$.

b) Für welche der fonlgenden Vektorfelder v gibt es eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass $v = \nabla f$.

☐ $v(x,y) = \begin{pmatrix} x-y \\ x-y \end{pmatrix}$

☐ $v(x,y) = \begin{pmatrix} x^2-y \\ x^3+2xy \end{pmatrix}$

☐ $v(x,y) = \begin{pmatrix} x^3+2xy \\ x^2-y \end{pmatrix}$

☐ $v(x,y) = \begin{pmatrix} x^3-xy^2 \\ x^2y-y^5 \end{pmatrix}$

2 Wegintegrale

In den folgenden Aufgaben berechnen Sie das Wegintegral von dem Vektorfeld v entlang der Kurve.

a) $v(x,y) = \begin{pmatrix} x^2-2xy \\ y^2-2xy \end{pmatrix}$, von $(-1,1)$ bis $(1,1)$ entlang der Kurve $y = x^2$.

b) $v(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ x^2-y^2 \end{pmatrix}$, von $(0,0)$ bis $(2,0)$ entlang der Kurve $y = 1 - |1-x|$.

c) $v(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ xz-y \end{pmatrix}$, entlang der Kurve $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \\ 4t^3 \end{pmatrix}$, $t \in [0,1]$.

d) $v(x,y) = \begin{pmatrix} 2a-y \\ x \end{pmatrix}$, entlang der Kurve $\gamma(t) = \begin{pmatrix} a(t-\sin(t)) \\ a(1-\cos(t)) \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$, wobei $a \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist.

3 Allgemeine Kettenregel (Polarkoordinaten)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Der Koordinatenechsel in Polarkoordinaten ist durch

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta)$$

gegeben. Drücken Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial r}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial \theta}$ von f in Polarkoordinaten durch $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}$ aus.

4 Extrema

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) = 3x^4 - 4x^2 y + y^2$$

gegeben.

a) Beweisen Sie, dass f auf der Linie $y = mx$, für $m \geq 0$ eine Konstante, ein lokales Minimum an der Stelle $(0, 0)$ hat.

b) Beweisen Sie, dass $(0, 0)$ kein lokales Minimum von f ist.

Eine englische Version dieser Übungsserie finden Sie auf der nächsten Seite

5 Multiple Choice Questions

a) Let $v : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ be defined by

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Which of the following statements is true?

☐ There exists a path $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ with $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$, such that

$$\int_\gamma v \; d\gamma < 0$$

☐ $v = \nabla f$ for a function $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$.

b) For which of the following vectorfield v does there exist a function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisfying $v = \nabla f$.

☐ $v(x,y) = \begin{pmatrix} x-y \\ x-y \end{pmatrix}$

☐ $v(x,y) = \begin{pmatrix} x^2-y \\ x^3+2xy \end{pmatrix}$

☐ $v(x,y) = \begin{pmatrix} x^3+2xy \\ x^2-y \end{pmatrix}$

☐ $v(x,y) = \begin{pmatrix} x^3-xy^2 \\ x^2y-y^5 \end{pmatrix}$

6 Pathintegrals

Compute in the following exercises the pathintegral of the vectorfield v along the path.

a) $v(x,y) = \begin{pmatrix} x^2-2xy \\ y^2-2xy \end{pmatrix}$, from $(-1,1)$ to $(1,1)$ along the path $y = x^2$.

b) $v(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ x^2-y^2 \end{pmatrix}$, from $(0,0)$ to $(2,0)$ along the path $y = 1 - |1-x|$.

c) $v(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ xz-y \end{pmatrix}$, along the path $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \\ 4t^3 \end{pmatrix}$, $t \in [0,1]$.

d) $v(x,y) = \begin{pmatrix} 2a-y \\ x \end{pmatrix}$, along the path $\gamma(t) = \begin{pmatrix} a(t-\sin(t)) \\ a(1-\cos(t)) \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$, where $a \in \mathbb{R}$ is a constant.

7 General chain rule (Polarcoordinates)

Let $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be twice differentiable. The coordinate change into polarcoordinates is given by

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta)$$

Express the partial derivatives $\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial r}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial \theta}$ of f in polarcoordinates through $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}$.

8 Extrema

Let $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be given by

$$f(x,y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2.$$

a) Prove that the restriction of f to the line $y = mx$, for some $m \geq 0$, attains its minimum at the point $(0,0)$.

b) Prove that $(0,0)$ is *not* a local minimum of f.