1 Multiple Choice Fragen

a) Sei $v : \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Welche der Aussagen gilt?

☑ Es existiert ein Weg $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ mit $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$, so dass

$$\int_\gamma v \; d\gamma < 0$$

Lösung: Sei $\gamma(t) = (\sin(t), \cos(t))$, $t \in [0,2\pi]$. Dann gilt $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$ und

$$v(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad \gamma'(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Nun folgt, dass

$$v(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = -(\cos^2(t) + \sin^2(t)) = -1 \quad \forall\; t \in [0,2\pi].$$

Somit haben wir

$$\int_\gamma v \; d\gamma = \int_0^{2\pi} -1 \; ds = -2\pi < 0,$$

was die Behauptung zeigt.
Daraus folgt auch, dass es keine Funktion $f : \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $v = \nabla f$. Weil wäre f so eine Funktion, dann hätten wir

$$\begin{aligned}\int_\gamma v \; d\gamma &= \int_0^{2\pi} \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \; dt = \int_0^{2\pi} \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \; dt \\ &= f(\gamma(2\pi)) - f(\gamma(0)) = f(\gamma(0)) - f(\gamma(0)) = 0,\end{aligned}$$

was einen Widerspruch gewesen wäre.

☐ $v = \nabla f$ für eine Funktion $f : \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$.

b) Für welche der fonlgenden Vektorfelder v gibt es eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass $v = \nabla f$.

☐ $v(x,y) = \begin{pmatrix} x-y \\ x-y \end{pmatrix}$

☐ $v(x,y) = \begin{pmatrix} x^2-y \\ x^3+2xy \end{pmatrix}$

☑ $v(x,y) = \begin{pmatrix} x^3+2xy \\ x^2-y \end{pmatrix}$

☐ $v(x,y) = \begin{pmatrix} x^3-xy^2 \\ x^2y-y^5 \end{pmatrix}$

Lösung: Falls ein stetig differenzierbare Vektorfeld v erfüllt

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} v_1(x,y) \\ v_2(x,y) \end{pmatrix} = \nabla f(x,y)$$

für eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dann gilt

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x}.$$

Daraus folgt, dass nur die dritte v eine Möglichkeit ist. Nun kontrolliert man, dass

$$\begin{pmatrix} x^3 + 2xy \\ x^2 - y \end{pmatrix} = \nabla f(x,y)$$

für

$$f(x,y) = \frac{x^4}{4} + x^2 y - \frac{y^2}{2}.$$

2 Wegintegrale

In den folgenden Aufgaben berechnen Sie das Wegintegral von dem Vektorfeld v entlang der Kurve.

a) $v(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - 2xy \\ y^2 - 2xy \end{pmatrix}$, von $(-1,1)$ bis $(1,1)$ entlang der Kurve $y = x^2$.

Lösung: Eine Parametrisierung der Kurve ist durch $\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$$

gegeben. Nun haben wir

$$v(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} t^2 - 2t^3 \\ t^4 - 2t^3 \end{pmatrix}, \quad v(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = t^2 - 2t^3 + 2t^5 - 4t^4.$$

Somit haben wir

$$\begin{aligned} \int_\gamma v \, d\gamma = \int_{-1}^{1} t^2 - 2t^3 + 2t^5 - 4t^4 \, dt &= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{3} - \frac{4t^5}{5} \right]_{t=-1}^{1} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{4}{5} - \left(\frac{-1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \right) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{4}{5} + \frac{1}{3} - \frac{4}{5} = \frac{2}{3} - \frac{8}{5} = -\frac{14}{15}, \end{aligned}$$

was die Aufgabe löst.

b) $v(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}$, von $(0,0)$ bis $(2,0)$ entlang der Kurve $y = 1 - |1 - x|$.

Lösung: Eine Parametrisierung der Kurve ist gegeben durch $\gamma(t) = (t, \gamma_2(t))$, $t \in [0,2]$, wobei

$$\gamma_2(t) = \begin{cases} t, & t \in [0,1] \\ 2 - t, & t \in [1,2]. \end{cases}$$

Somit haben wir für $t \in [0,1]$

$$v(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 2t^2$$

und für $t \in [1,2]$

$$v(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} t^2 + (2-t)^2 \\ t^2 - (2-t)^2 \end{pmatrix}, \quad v(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 2(2-t)^2$$

Nun rechnen wir

$$\begin{aligned} \int_\gamma v \, d\gamma &= \int_0^1 2t^2 \, dt + \int_1^2 2(2-t)^2 dt = \left[\frac{2t^3}{3}\right]_{t=0}^1 + 2\left[\frac{-(2-t)^3}{3}\right]_{t=1}^2 \\ &= \frac{2}{3} + 2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}, \end{aligned}$$

was die Aufgabe löst.

c) $v(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ xz - y \end{pmatrix}$, entlang der Kurve $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \\ 4t^3 \end{pmatrix}$, $t \in [0,1]$.

Lösung: Wir haben

$$v(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \\ 4t^5 - 2t \end{pmatrix}, \quad \gamma'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 2 \\ 12t^2 \end{pmatrix}, \quad v(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 2t^3 + 4t + 12t^2(4t^5 - 2t),$$

und somit

$$\begin{aligned} \int_\gamma v \, d\gamma &= \int_0^1 2t^3 + 4t + 12t^2(4t^5 - 2t) \, dt = \int_0^1 4t + 48t^7 - 22t^3 \, dt \\ &= \left[2t^2 + 6t^8 - \frac{22t^4}{4}\right]_{t=0}^1 = 2 + 6 - \frac{11}{2} = \frac{4 + 12 - 11}{2} = \frac{5}{2}, \end{aligned}$$

was die Aufgabe löst.

d) $v(x,y) = \begin{pmatrix} 2a - y \\ x \end{pmatrix}$, entlang der Kurve $\gamma(t) = \begin{pmatrix} a(t - \sin(t)) \\ a(1 - \cos(t)) \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$, wobei $a \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist.

Lösung: Wir haben

$$v(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} 2a - a(1 - \cos(t)) \\ a(t - \sin(t)) \end{pmatrix}, \quad \gamma'(t) = \begin{pmatrix} a(1 - \cos(t)) \\ a \sin(t) \end{pmatrix}$$

und somit gilt

$$\begin{aligned} v(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = &2a^2 - 2a^2 \cos(t) - a^2 t + a^2 \cos(t) + a^2 \cos(t) \\ &- a^2 \cos^2(t) + a^2 \sin(t) t - a^2 \sin^2(t). \end{aligned}$$

Nun folgt, dass

$$\begin{aligned}\int_\gamma v\ d\gamma &= \int_0^{2\pi} 2a^2 - 2a^2\cos(t) - a^2 t + a^2\cos(t) + a^2\cos(t) \\ &\qquad - a^2\cos^2(t) + a^2\sin(t)t - a^2\sin^2(t)\ dt \\ &= \int_0^{2\pi} 2a^2 - a^2 t + -a^2\cos^2(t) + a^2\sin(t)t - a^2\sin^2(t)\ dt = -2\pi^2 a^2.\end{aligned}$$

3 Allgemeine Kettenregel (Polarkoordinaten)

Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Der Koordinatenechsel in Polarkoordinaten ist durch

$$x = r\cos(\theta),\quad y = r\sin(\theta)$$

gegeben. Drücken Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial r}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial\theta}$ von f in Polarkoordinaten durch $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x}$ aus.

Lösung: Die Koordinatentransformation $\varphi:(0,\infty)\times[0,2\pi)\to\mathbb{R}$ ist durch

$$\varphi(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

gegeben. Nun haben wir

$$d\varphi(r,\theta) = \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -r\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & r\cos(\theta)\end{pmatrix}.$$

Nun definieren wir $g := f\circ\varphi$ und bemerken, dass wir mit der Kettenregel

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\frac{\partial g}{\partial r} & \frac{\partial g}{\partial\theta}\end{pmatrix} &= dg(r,\theta)\\ &= df(\varphi(r,\theta))d\varphi(r,\theta)\\ &= \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(r,\theta)) & \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(r,\theta))\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -r\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & r\cos(\theta)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(r,\theta))\cos(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(r,\theta))\sin(\theta) & -r\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(r,\theta))\sin(\theta) + r\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(r,\theta))\cos(\theta)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

erhalten. Wenn wir die Kettenregel noch ein mal benutzen folgt daraus, dass

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial^2 r} =& \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(r,\theta))\cos(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(r,\theta))\sin(\theta)\right)\\ =& d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(\varphi(r,\theta))\frac{\partial}{\partial r}\varphi(r,\theta)\cos(\theta) + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(\varphi(r,\theta))\frac{\partial}{\partial r}\varphi(r,\theta)\sin(\theta)\\ =& \begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(\varphi(r,\theta)) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(\varphi(r,\theta))\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}\cos(\theta)\\ &+ \begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\varphi(r,\theta)) & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(\varphi(r,\theta))\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}\sin(\theta),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial^2\theta} =& \frac{\partial}{\partial\theta}\left(-r\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(r,\theta))\sin(\theta) + r\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(r,\theta))\cos(\theta)\right)\\
=& -r\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(\varphi(r,\theta)) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(\varphi(r,\theta))\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-r\sin(\theta)\\ r\cos(\theta)\end{pmatrix}\sin(\theta)\\
&- r\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(r,\theta))\cos(\theta)\\
&+ r\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\varphi(r,\theta)) & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(\varphi(r,\theta))\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-r\sin(\theta)\\ r\cos(\theta)\end{pmatrix}\cos(\theta)\\
&- r\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(r,\theta))\sin(\theta)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta} =& \frac{\partial}{\partial r}\left(-r\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(r,\theta))\sin(\theta) + r\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(r,\theta))\cos(\theta)\right)\\
=& -r\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(\varphi(r,\theta)) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(\varphi(r,\theta))\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}\sin(\theta)\\
&- \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(r,\theta))\sin(\theta)\\
&+ r\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\varphi(r,\theta)) & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(\varphi(r,\theta))\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}\cos(\theta)\\
&+ \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(r,\theta))\cos(\theta),
\end{aligned}$$

was die Aufgabe löst.

4 Extrema

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$$

gegeben.

a) Beweisen Sie, dass f auf der Linie $y = mx$, für $m \in \mathbb{R}$ eine Konstante, ein lokales Minimum an der Stelle $(0,0)$ hat.

   Lösung: Zunächst betrachten wir der Fall $m = 0$. In diesem Fall haben wir

   $$f(x,0) = 3x^4$$

   und man sieht, dass f auf der Linie $y = 0$ ein lokales Minimum an der Stelle $x = 0$ hat. Nun betrachten wir den Fall $m \neq 0$. Wir definieren $h(x) := f(x, mx)$, so dass

   $$\begin{aligned}h'(x) &= 12x^3 - 12x^2m + 2m^2x\\ h''(x) &= 36x^2 - 24xm + 2m^2.\end{aligned}$$

Man sieht, dass

$$h'(0) = 0, \quad h''(0) = 2m^2 > 0.$$

Somit folgt nochmals, dass f auf der Linie $y = mx$ ein lokales Minimum an der Stelle $(0,0)$ hat.

b) Beweisen Sie, dass $(0,0)$ kein lokales Minimum von f ist.

Lösung: Wäre $(0,0)$ ein lokales Minimum von f gewesen, dann wäre auch 0 ein lokales Minimum von der Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$h(x) := f(x, 2x^2) = 3x^4 - 4x^2(2x^2) + (2x^2)^2 = 3x^4 - 8x^4 + 4x^4 = -x^4$$

gewesen. Aber man sieht, dass h ein lokales Maximum an der Stelle 0 hat! Dieser Widerspruch löst die aufgabe.