1 Multiple Choice Fragen

a) Die Arbeit A eines Vektorfeldes $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ längs des Geradenstücks von $(10, 5)$ nach $(-1, 2)$ sei 8. Welches Resultat erhält man, wenn man die Arbeit B von v längs des Geradenstücks von $(-1, 2)$ nach $(10, 5)$ berechnet?

☐ Die Arbeit B lässt sich nicht berechnen.

☐ -8

☐ 16

b) Wie lautet die Hessematrix der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = e^x \cos(y)$?

☐
$$\begin{pmatrix} e^x \sin(y) & -e^x \sin(y) \\ -e^x \sin(y) & -e^x \sin(y) \end{pmatrix}$$

☐
$$\begin{pmatrix} e^x \cos(y) & -e^x \sin(y) \\ -e^x \sin(y) & -e^x \cos(y) \end{pmatrix}$$

☐
$$\begin{pmatrix} e^x \cos(y) & -e^x \cos(y) \\ -e^x \cos(y) & -e^x \cos(y) \end{pmatrix}$$

2 Potenzial I

Nehmen Sie an, dass das stetige Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein Potential $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ hat (also $v = \nabla f$).

a) Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Kurve, die die Differetialgleichung

$$\gamma'(t) = v(\gamma(t)) \quad \forall\ t \in [a, b]$$

erfüllt. Beweisen Sie, dass $f(\gamma(b)) \geq f(\gamma(a))$ ist und zeigen Sie, dass genau dann $f(\gamma(b)) = f(\gamma(a))$ gilt, wenn γ eine konstante Kurve ist.

b) Sei $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein stetiges Vektorfeld, so dass $w(z) \perp v(z)$ für alle $z \in \mathbb{R}^2$ und sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Kurve, die die Differentialgleichung

$$\gamma'(t) = w(\gamma(t)) \quad \forall\ t \in [a, b]$$

erfüllt. Beweisen Sie, dass $[a, b] \ni t \mapsto f(\gamma(t))$ konstant ist.

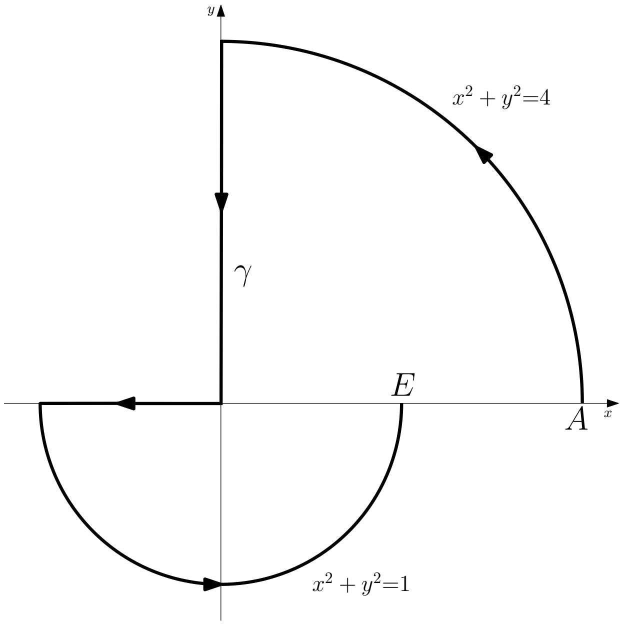
3 Wegintegral

Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_\gamma v\ d\gamma$$

entlang dem eingezeichneten Weg γ (vom Anfangspunkt A bis zum Endpunkt E) für das Vektorfeld

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} x^3 - xy \\ -y^3 + x^2 \end{pmatrix}.$$



4 Potenzial II

Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ schreiben wir $r = \|x\|$. Bestimmen Sie eine Potenzialfunktion f für das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n$,

$$v(x) = r^p x,$$

wobei $p \in \mathbb{R}$.
TIPP: Es gibt zwei verschiedene Fälle: 1) $p \neq -2$ und 2) $p = -2$.

Eine englische Version dieser Übungsserie finden Sie auf der nächsten Seite

5 Multiple Choice Questions

a) The work A of a vectorfield $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ along the line segment from $(10,5)$ to $(-1,2)$ equals 8. What is the result when one obtains when computing the work B of v along the line segment from $(-1,2)$ to $(10,5)$?

- ☐ The work B cannot be computed from the given data.
- ☐ -8
- ☐ 16

b) What is the Hessian of the function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^x \cos(y)$?

- ☐
$$\begin{pmatrix} e^x \sin(y) & -e^x \sin(y) \\ -e^x \sin(y) & -e^x \sin(y) \end{pmatrix}$$
- ☐
$$\begin{pmatrix} e^x \cos(y) & -e^x \sin(y) \\ -e^x \sin(y) & -e^x \cos(y) \end{pmatrix}$$
- ☐
$$\begin{pmatrix} e^x \cos(y) & -e^x \cos(y) \\ -e^x \cos(y) & -e^x \cos(y) \end{pmatrix}$$

6 Potential I

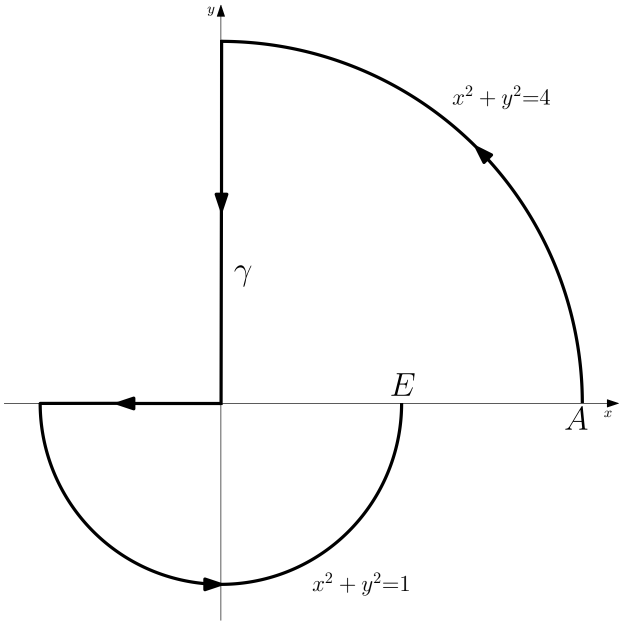
Assume that the continuous vectorfield $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ has a potential $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (i.e. $v = \nabla f$).

a) Let $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ be a continuous differentiable curve which solves the differential equation
$$\gamma'(t) = v(\gamma(t)) \quad \forall\, t \in [a,b].$$
Prove that $f(\gamma(b)) \geq f(\gamma(a))$ and show that $f(\gamma(b)) = f(\gamma(a))$ exactly when γ is constant.

b) Let $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ be a continuous vectorfield so that $w(z) \perp v(z)$ for every $z \in \mathbb{R}^2$ and let $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ be a continuously differentiable curve which solves the differential equation
$$\gamma'(t) = w(\gamma(t)) \quad \forall\, t \in [a,b].$$
Prove that $[a,b] \ni t \mapsto f(\gamma(t))$ is constant.

7 Path integral

Compute the path integral
$$\int_\gamma v \; d\gamma$$
along the drawn path γ (from starting point A to the last point E) for the vectorfield
$$v(x,y) = \begin{pmatrix} x^3 - xy \\ -y^3 + x^2 \end{pmatrix}.$$



8 Potential II

For $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ we write $r = \|x\|$. Determine a potential function f for the vectorfield $v : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n$,

$$v(x) = r^p x,$$

where $p \in \mathbb{R}$.
HINT: There are two different cases to consider: 1) $p \neq -2$ and 2) $p = -2$.