

1 Multiple Choice Fragen

a) Die Arbeit A eines Vektorfeldes $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ längs des Geradenstücks von $(10, 5)$ nach $(-1, 2)$ sei 8. Welches Resultat erhält man, wenn man die Arbeit B von v längs des Geradenstücks von $(-1, 2)$ nach $(10, 5)$ berechnet?

Die Arbeit B lässt sich nicht berechnen.

-8

Lösung: Eine Parametrisierung des Geradenstücks von $(10, 5)$ nach $(-1, 2)$ ist durch

$$\gamma(t) = t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + (1-t) \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1]$$

gegeben. Somit ist eine Parametrisierung des Geradenstück von $(-1, 2)$ nach $(10, 5)$ durch $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$, $t \in [1, 0]$ gegeben. Nun sieht man, dass

$$\begin{aligned} B &= \int_{\tilde{\gamma}} v \, d\tilde{\gamma} = \int_0^1 v(\tilde{\gamma}(t)) \cdot \tilde{\gamma}'(t) \, dt = \int_0^1 v(\gamma(1-t)) \cdot \gamma'(1-t)(-1) \, dt \\ &\stackrel{(s=1-t)}{=} \int_1^0 v(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s) \, ds = - \int_{\gamma} v \, d\gamma = -A = -8. \end{aligned}$$

16

b) Wie lautet die Hessematrix der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = e^x \cos(y)$?

$$\begin{pmatrix} e^x \sin(y) & -e^x \sin(y) \\ -e^x \sin(y) & -e^x \sin(y) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e^x \cos(y) & -e^x \sin(y) \\ -e^x \sin(y) & -e^x \cos(y) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e^x \cos(y) & -e^x \cos(y) \\ -e^x \cos(y) & -e^x \cos(y) \end{pmatrix}$$

Lösung: Die Hessematrix ist durch

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} \end{pmatrix}$$

definiert. Ausrechnen gibt die Antwort.

2 Potenzial I

Nehmen Sie an, dass das stetige Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein Potential $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ hat (also $v = \nabla f$).

a) Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Kurve, die die Differentialgleichung

$$\gamma'(t) = v(\gamma(t)) \quad \forall t \in [a, b]$$

erfüllt. Beweisen Sie, dass $f(\gamma(b)) \geq f(\gamma(a))$ ist und zeigen Sie, dass genau dann $f(\gamma(b)) = f(\gamma(a))$ gilt, wenn γ eine konstante Kurve ist.

Lösung: Wir wenden die Kettenregel an:

$$\begin{aligned} f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) &= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt = \int_a^b df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b \nabla f(\gamma(t)) \cdot \nabla f(\gamma(t)) dt = \int_a^b |\nabla f(\gamma(t))|^2 dt \geq 0. \end{aligned}$$

Dies beweist die erste Aussage. Weiter folgt daraus, dass $f(\gamma(b)) = f(\gamma(a))$ genau dann, wenn $0 = \nabla f(\gamma(t)) = v(\gamma(t)) = \gamma'(t)$ für alle $t \in [a, b]$. Also, genau dann, wenn γ konstant ist.

b) Sei $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein stetiges Vektorfeld, so dass $w(z) \perp v(z)$ für alle $z \in \mathbb{R}^2$ und sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Kurve, die die Differentialgleichung

$$\gamma'(t) = w(\gamma(t)) \quad \forall t \in [a, b]$$

erfüllt. Beweisen Sie, dass $[a, b] \ni t \mapsto f(\gamma(t))$ konstant ist.

Lösung: Die Kettenregel gibt

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = v(\gamma(t)) \cdot w(\gamma(t)) = 0.$$

Daraus folgt die Behauptung.

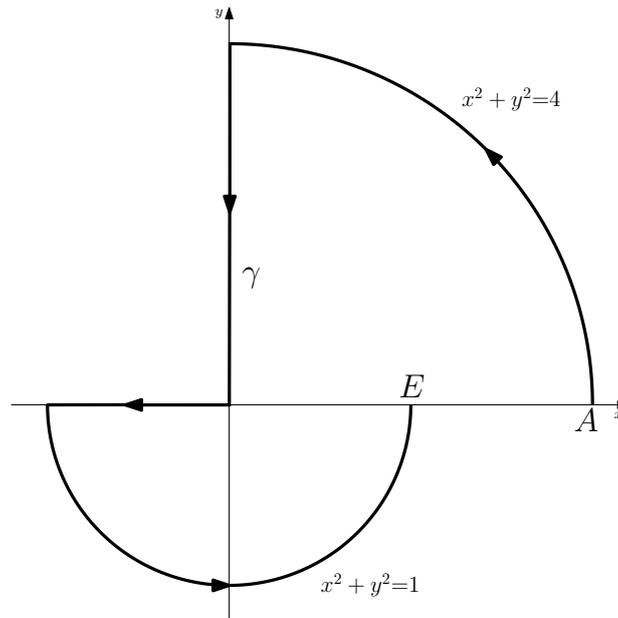
3 Wegintegral

Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_{\gamma} v d\gamma$$

entlang dem eingezeichneten Weg γ (vom Anfangspunkt A bis zum Endpunkt E) für das Vektorfeld

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} x^3 - xy \\ -y^3 + x^2 \end{pmatrix}.$$



Lösung: Wir haben folgende Parametrisierung:

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (2 \cos(t), 2 \sin(t)), & t \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ \gamma_2(t) &= (0, -t), & t \in [-2, 0], \\ \gamma_3(t) &= (-t, 0), & t \in [0, 1], \\ \gamma_4(t) &= (\cos(t), \sin(t)), & t \in [\pi, 2\pi]. \end{aligned}$$

• Integral über γ_1 :

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int_{\gamma_1} v \, d\gamma_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} v(\gamma_1(t)) \dot{\gamma}_1(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 8 \cos^3(t) - 4 \cos(t) \sin(t) \\ -8 \sin^3(t) + 4 \cos^2(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \sin(t) \\ 2 \cos(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -16 \cos^3(t) \sin(t) + 8 \cos(t) \sin^2(t) - 16 \cos(t) \sin^3(t) + 8 \cos^3(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -16 \underbrace{\cos(t) \sin(t)}_{=\frac{\sin(2t)}{2}} \underbrace{(\cos^2(t) + \sin^2(t))}_{=1} + 8 \cos(t) \underbrace{(\sin^2(t) + \cos^2(t))}_{=1} dt \\ &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin(2t) + \cos(t) dt \\ &= 8 \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \sin(t) \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 8 \cdot (-1 + 1) = 0 \end{aligned}$$

- Integral über γ_2 :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} v \, d\gamma_2 &= \int_0^2 v(\gamma_2(t)) \dot{\gamma}_2(t) dt \\ &= \int_{-2}^0 \begin{pmatrix} 0 \\ -(-t)^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt \\ &= - \int_{-2}^0 t^3 dt = - \left. \frac{t^4}{4} \right|_{-2}^0 \\ &= 4. \end{aligned}$$

- Integral über γ_3 :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_3} v \, d\gamma_3 &= \int_0^1 v(\gamma_3(t)) \dot{\gamma}_3(t) dt \\ &= \int_0^1 \begin{pmatrix} -t^3 \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 t^3 dt = \left. \frac{t^4}{4} \right|_0^1 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

- Integral über γ_4 :

$$\begin{aligned} I_4 &:= \int_{\gamma_4} v \, d\gamma_4 = \int_{\pi}^{2\pi} v(\gamma_1(t)) \dot{\gamma}_1(t) dt \\ &= \int_{\pi}^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos^3(t) - \cos(t) \sin(t) \\ -\sin^3(t) + \cos^3(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_{\pi}^{2\pi} -\cos^3(t) \sin(t) + \cos(t) \sin^2(t) - \cos(t) \sin^3(t) + \cos^3(t) dt \\ &= \int_{\pi}^{2\pi} \underbrace{-\cos(t) \sin(t)}_{=\frac{\sin(2t)}{2}} \underbrace{(\cos^2(t) + \sin^2(t))}_{=1} + \cos(t) \underbrace{(\sin^2(t) + \cos^2(t))}_{=1} dt \\ &= \int_{\pi}^{2\pi} -\frac{\sin(2t)}{2} + \cos(t) dt \\ &= \left(\frac{\cos(2t)}{4} + \sin(t) \right) \Big|_{\pi}^{2\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Insgesamt:

$$\int_{\gamma} v \, d\gamma = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0 + 4 + \frac{1}{4} + 0 = \frac{17}{4}.$$

4 Potenzial II

Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ schreiben wir $r = \|x\|$. Bestimmen Sie eine Potenzialfunktion f für das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$v(x) = r^p x,$$

wobei $p \in \mathbb{R}$.

TIPP: Es gibt zwei verschiedene Fälle: 1) $p \neq -2$ und 2) $p = -2$.

Lösung: Wenn $p \neq -2$ behaupten wir, dass

$$f(x) = \frac{\|x\|^{p+2}}{p+2} = \frac{\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{\frac{p+2}{2}}}{p+2}, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

eine Potenzial für v ist. Die Kettenregel gibt

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{2x_k}{2} \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{\frac{p+2}{2}-1} = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{\frac{p}{2}} x_k = \|x\|^p x_k.$$

Daraus folgt $\nabla f = v$, was die Behauptung zeigt. Im Fall $p = -2$ haben wir

$$v(x) = \frac{x}{\|x\|^2}.$$

In diesem Fall behaupten wir, dass

$$f(x) = \frac{\log(\|x\|^2)}{2} = \frac{\log\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)}{2}, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

ein Potenzial für v ist. Die Kettenregel gibt noch ein Mal

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{2x_k}{2\|x\|^2} = \frac{x_k}{\|x\|^2}.$$

Dies zeigt $\nabla f(x) = v(x)$.