Analysis I für D-INFK

Zusammenfassung

ETH Zürich FS 2017

Prof. Özlem Imamoglu[1]

1. August 2017

[1]Dept. of Mathematics, ETH Zürich, CH-8092 Zürich ozlem@math.ethz.ch

Inhaltsverzeichnis

1 Grundbegriffe

1.1 Supremum und Infimum

Betrachte eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}$.

Definition: Eine reelle Zahl y mit $\forall x \in X : x \leqslant y$ (bzw. $x \geqslant y$) heisst eine **obere Schranke von** X**.** (bzw. **untere Schranke von** X**.**)Existiert eine solche obere (untere) Schranke, so heisst X *nach oben (bzw. nach unten) beschränkt.*

Satz 1.1.1 *Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge $X \subset \mathbb{R}$ besitzt eine eindeutige kleinste obere Schranke, genannt* **Supremum von** X *und geschrieben* $\sup(X)$*. Besitzt X schon ein Maximum, so gilt* $\sup(X) = \max(X)$*.*

Jede nichtleere nach unten beschränkte Teilmenge $X \subset \mathbb{R}$ besitzt eine eindeutige grösste untere Schranke, genannt **Infimum von** X *und geschrieben* $\inf(X)$*. Besitzt X schon ein Minimum, so gilt* $\inf(X) = \min(X)$*.*

Definition: $\sup(\varnothing) := -\infty$, $\inf(\varnothing) := \infty$. Das Supremum jeder nicht nach oben beschränkten Teilmenge $X \subset \mathbb{R}$ ist $\sup(X) := \infty$. Das Infimum jeder nicht nach unten beschränkten Teilmenge $X \subset \mathbb{R}$ ist $\inf(X) := -\infty$.

Fakt: Eine äquivalente Charakterisierung des Supremums $s := \sup(X)$ ist die Bedingung:

$$(\forall x \in X : x \leqslant s) \ \wedge \ (\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X : x > s - \varepsilon).$$

Das Analoge gilt für das Infimum.

Eigenschaften: Für je zwei Teilmengen $X, Y \subset \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ setze $cX := \{cx \mid x \in X\}$ und $X + Y := \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sup(X \cup Y) &= \max\{\sup(X), \sup(Y)\}, \\
\sup(X + Y) &= \sup(X) + \sup(Y), \\
\sup(cX) &= c \sup(X) \qquad \text{für } c > 0, \\
\sup(cX) &= c \inf(X) \qquad \text{für } c < 0,
\end{aligned}$$

und das Entsprechende für das Infimum.

Satz 1.1.2 (Archimedische Prinzip) *Es gelten folgende Aussagen:*
(a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert genau ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leqslant x < n + 1$
(b) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{Z}^{>0}$ mit $1/n < \varepsilon$

1.2 Komplexe Zahlen

Definition: Ein Ausdruck der Form $z = x + iy$ für $x, y \in \mathbb{R}$ heisst eine **komplexe Zahl**. Die Zahl $\mathrm{Re}(z) := x$ heisst der **Realteil von** z, die Zahl $\mathrm{Im}(z) := y$ der **Imaginärteil von** z. Die Menge der komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Definition: Die *Summe* und das *Produkt* zweier komplexer Zahlen sind definiert durch

$$\begin{aligned}
(x + iy) + (x' + iy') &:= (x + x') + i(y + y'), \\
(x + iy) \cdot (x' + iy') &:= (xx' - yy') + i(xy' + x'y).
\end{aligned}$$

Definition: Für x, $y \in \mathbb{R}$ heisst $|z| := \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ der *Absolutbetrag* von $z := x + iy$. Für $z = x \in \mathbb{R}$ stimmt dieser mit dem üblichen reellen Absolutbetrag überein.

Eigenschaften: Für alle $z,\, z' \in \mathbb{C}$ gilt $|zz'| = |z| \cdot |z'|$, $|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$. (Dreiecksungleichung) und $|z| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0$

Definition: Für $x,\, y \in \mathbb{R}$ heisst $\overline{z} := x - iy$ die **komplex Konjugierte** von $z := x + iy$.

Eigenschaften: Die komplexe Konjugation ist mit allen Körperoperationen verträglich, das heisst, für alle $z,\, z' \in \mathbb{C}$ gilt $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$, und $\overline{zz'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$.
Fakt: Den Quotienten zweier komplexer Zahlen $z = x + iy$ und $w = u + iv \neq 0$ für $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ berechnet man elegant durch Erweiterung mit $\overline{w}$:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\,\overline{w}}{w\,\overline{w}} = \frac{(x+iy)(u-iv)}{u^2+v^2} = \frac{xu+yv}{u^2+v^2} + i \cdot \frac{yu-xv}{u^2+v^2}.$$

Polarkoordinaten: Jede komplexe Zahl $z = x + iy$ für $x,\, y \in \mathbb{R}$ kann man schreiben in der Form

$$x + iy = r \cdot e^{i\varphi} \quad \text{mit} \quad e^{i\varphi} := \cos\varphi + i \sin\varphi$$

Fakt: Für alle $r, r' \in \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ und $\varphi, \varphi' \in \mathbb{R}$ gilt $re^{i\varphi} \cdot re^{i\varphi'} = rr' \cdot e^{i(\varphi+\varphi')}$.
Insbesondere gilt für alle $r \in \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ $(re^{i\varphi})^n = r^n \cdot e^{in\varphi}$.

Folge: Für alle $n \geqslant 1$ und $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ besitzt die Gleichung $w^n = z$ genau n verschiedene Lösungen $w \in \mathbb{C}$, nämlich für $z = re^{i\varphi}$ die komplexen Zahlen

$$w = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}$$

für $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Jede von diesen kann man als eine n-te Wurzel aus z ansehen.

Fundamentalsatz der Algebra: Jedes Polynom $p(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0$ mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$ ist ein Produkt von Linearfaktoren $(z - \zeta_1) \cdots (z - \zeta_n)$. Dabei sind die Nullstellen $\zeta_1, \ldots, \zeta_n \in \mathbb{C}$ bis auf die Reihenfolge bestimmt.

2 Folgen und Reihen

Definition: Eine Abbildung $\mathbb{Z}^{\geqslant 0} \to \mathbb{R}$, $k \mapsto a_k$ heisst eine **(unendliche) Folge in** $\mathbb{R}$. Alternative Schreibweisen: $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ oder $(a_k)_{k\geqslant 0}$ oder $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$. Der Laufindex kann auch an einer anderen Stelle als bei 0 beginnen. Eine Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ heisst **beschränkt**, falls die Teilmenge $\{a_n : n \geqslant 1\} \subset \mathbb{R}$ beschränkt ist.

2.1 Grenzwert einer Folgen und Konvergenzkriterien

Definition: Eine Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ **konvergiert** gegen a für $n \to \infty$ falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{Z}^{\geqslant 1} : |a_n - a| \leqslant \varepsilon,\ \ \forall n \geqslant N_0$$

Wir schreiben $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$ $(n \to \infty)$ und nennen a den **Grenzwert** oder **Limes** der Folge. Eine Folge (a_n) heisst **konvergent**, falls sie einen Limes besitzt, andernfalls heisst sie **divergent**.

Beispiele: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\quad \lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$.

Seien $p \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ fest. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, $\quad \lim_{n\to\infty} n^p q^n = 0$.

Seien $a_n = (-1)^n$, und $\quad b_n = n$. Dann sind (a_n) und (b_n) divergent

Satz 2.1.1 *Der Grenzwert einer Konvergente Folge $(a_n)_n$ ist eindeutig bestimmt.*

Satz 2.1.2 *Falls $(a_n)_{n\geqslant 1}$ konvergiert, ist $\{a_n|n \geqslant 1\}$ beschränkt.*

Satz 2.1.3 *Seien $(a_n)_{n\geqslant 1}, (b_n)_{n\geqslant 1}$ konvergente Folgen mit den Grenzwerten $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt:*

1. *Die Folge $(a_n + b_n)_{n\geqslant 1}$ konvergiert und $\lim(a_n + b_n) = a + b$*
2. *Die Folge $(a_n b_n)_{n\geqslant 1}$ konvergiert und $\lim a_n b_n = ab$.*
3. *Falls $b, b_n \neq 0$, für alle $n \geqslant 1$, so gilt $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.*
4. *Falls $a_n \leqslant b_n \ \forall n \geqslant 1$, dann gilt auch $a \leqslant b$.*

Satz 2.1.4 (Sandwich Satz) *Es seien $(a_n)_n, (b_n)_n, (c_n)_n$ drei Folgen so dass $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Angenommen (a_n) und $(c_n)_n$ sind konvergent und $a = \lim a_n = \lim c_n$. Dann ist auch die Folge $(b_n)_n$ konvergent und $\lim b_n = a$*

Satz 2.1.5 (Monotone Konvergenz Satz) *Eine monotone reelle Folge $(a_n)_n$ konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist.*

Beispiel: Sei $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$. Dann ist a_n eine monotone wachsende, beschränkte Folge ($2 \leqslant a_n \leqslant 4$) mit dem Grenzwert e, die Eulersche Zahl.

Definition: Eine Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ heisst **Cauchy Folge**, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{Z}^{\geqslant 1} : |a_n - a_m| < \varepsilon, \ \forall\, n, m \geqslant N.$$

Satz 2.1.6 *Eine reelle Folge $(a_n)_n$ ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy Folge ist.*

2.2 Teilfolgen, Häufungspunkte

Definition: Sei $(a_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{R}$ eine Folge und $\ell(n)$ eine strikt monoton wachsende Folge positiver natürlicher Zahlen. Die Verkettung $n \to \ell(n) \to a_{\ell(n)}$ heisst eine **Teilfolge** $(a_{\ell(n)})_{n\geqslant 1}$ von $(a_n)_{n\geqslant 1}$.

Satz 2.2.1 *Sei $(a_n)_n$ eine konvergente Folge. Jede Teilfolge $(a_{\ell(n)})_n$ von $(a_n)_n$ konvergiert und hat denselben Grenzwert $\lim a_{\ell(n)} = \lim a_n$*

Definition: $a \in \mathbb{R}$ heißt **Häufungspunkt** einer Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$, falls $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine gegen a konvergente Teilfolge $(a_{\ell(n)})$ besitzt, d.h. falls $\lim_{n\to\infty} a_\ell(n) = a$.

Beispiel: Die Folge $a_n = (-1)^n$ hat die Häufungspunkte $+1$ und -1 da $\lim a_{2n} = 1$ und $\lim a_{2n+1} = -1$ gelten.

Definition: Für eine beschränkte Folge $(a_n)_n$ ist der **Limes superior** definiert durch

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} (\sup_{k\geqslant n} a_k)$$

Für eine beschränkte Folge $(a_n)_n$ ist der **Limes inferior** definiert durch

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} (\inf_{k\geqslant n} a_k)$$

Satz 2.2.2 (Bolzano-Weierstrass) *Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ besitzt eine konvergente Teilfolge, und somit auch einen Häufungspunkt.*

2.3 Uneigentliche Grenzwerte

Definition: Eine reelle Folge $(a_n)_n$ hat **uneigentliche Grenzwert** ∞ oder **divergiert gegen** ∞ wenn für jedes $C > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert so dass $a_n > C$ gilt für alle $n \geqslant N$. In diesem fall schreiben wir $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

2.4 Reihen

Definition: Sei $(a_k)_k$ eine Folge ein $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Ein Ausdruck der Form $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heisst eine **(unendliche) Reihe**. Der Laufindex kann auch an einer anderen Stelle als bei 0 beginnen.

Falls **die Folge der Partialsummen** $(S_n)_n := \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_n$ einen eigentlichen oder uneigentlichen Grenzwert besitzt, so heisst dieser der **Wert der Reihe** und wird bezeichnet mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \ := \ \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k\Big).$$

Beispiel: Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ zu einer komplexen Zahl q heisst **geometrische Reihe**. Sie konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$ ist, und hat dann den Grenzwert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k \ = \ \frac{1}{1-q}$.

Beispiel: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ zu einer reellen Zahl s konvergiert genau dann, wenn $s > 1$ ist. Insbesondere divergiert die **harmonische Reihe**: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \ = \ \infty$.

Fakt: Jede (sogenannte **alternierende** oder **Leibniz**) Reihe der Form $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ für eine monoton fallende Folge reeller Zahlen $a_k > 0$ mit $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ ist konvergent. Insbesondere ist die alternierende Harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k}$ konvergent.

Satz 2.4.1 (Cauchy Kriterium) *Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt so dass für $n \geqslant m \geqslant N$, $\ |\sum_{k=m}^{n} a_k| < \varepsilon$ erfüllt ist.*

Satz 2.4.2 *Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, so gilt $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Die Umkehrung gilt aber nicht.*

2.5 Rechnen mit Reihen

Satz 2.5.1 *Von jeder Reihe lassen sich endlich viele Glieder abspalten; dabei konvergiert die rechte Seite genau dann bedingt oder absolut, wenn die linke Seite es tut: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \ = \ a_0+\ldots+a_{n-1}+\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$.*

Satz 2.5.2 *Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen, und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann sind die Reihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k)$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(\alpha a_k)$ konvergent und es gilt $\alpha \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k + \beta \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k \ = \ \sum\limits_{k=0}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k)$.*

2.6 Bedingte und Absolute Konvergenz

Definition: Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heisst **absolut konvergent**, wenn die Reihe der Absolutbeträge $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Beispiel: Die alternierende harmonische Reihe ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.

Satz 2.6.1 *Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent und behält die Konvergenz sowie ihren Grenzwert unter beliebiger Umordnung.*

Satz 2.6.2 *Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ absolute konvergente Reihen. Dann konvergiert die Reihe der Produkte absolute mit*

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\Big)\cdot\Big(\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell\Big) \ = \ \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty} a_k b_\ell \ = \ \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_\ell \ = \ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

2.7 Kriterien für Absolute Konvergenz

Satz 2.7.1 (Vergleichskriterium) *Gilt $|a_k| \leqslant b_k$ für alle k und ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent, so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent und daher auch konvergent.*

Satz 2.7.2 (Wurzelkriterium) *Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.*

1. *Falls $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, so konvergiert $\sum a_k$.*
2. *Falls $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} > 1$, so divergiert $\sum a_k$.*

Satz 2.7.3 (Quotientenkriterium) *Sei $a_k \neq 0, k \in \mathbb{Z}^{\geqslant 1}$ so dass $\lim_{k\to\infty} \dfrac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = L$ existiert.*

1. *Falls $L < 1$, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.*
2. *Falls $L > 1$, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.*

2.8 Potenzreihen

Definition: Ein Ausdruck der Form

$$p(z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \;=\; c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$$

mit $c_k \in \mathbb{C}$ bzw. $c_k \in \mathbb{R}$ heisst *(komplexe bzw. reelle) Potenzreihe in z.*

Satz 2.8.1 *Die Potenzreihe $p(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ ist **konvergent** $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \rho := \frac{1}{\limsup |c_k|^{1/k}}$. $p(z)$ ist **divergent** für alle $|z| > \rho$.*

Im Fall $\rho = 0$ konvergiert $f(z)$ nur für $z = 0$. Im Fall $\rho = \infty$ konvergiert die Reihe auf ganz $\mathbb{C}$. Andernfalls ist der Konvergenzbereich eine Kreisscheibe vom Radius ρ mit dem Mittelpunkt 0. Für das Konvergenzverhalten auf dem Rand der Kreisscheibe gibt es dann verschiedene Möglichkeiten: Konvergenz auf jedem Randpunkt, nur auf einem Teil des Randes, oder auf keinem Randpunkt.

Fakt: Der Konvergenzradius ist $\rho = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right|$, $\rho = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|c_k|}}$ falls der betreffende Grenzwert existiert.
Beispiel: $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k, \;\; |x| < 1$

Variante: Alle Begriffe und Resultate gelten entsprechend für Potenzreihen in $z - z_0$ für festes $z_0 \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$: $f(z) \;=\; \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \;=\; a_0 + a_1 \cdot (z - z_0) + a_2 \cdot (z - z_0)^2 + \ldots$

2.9 Exponentialfunktion

Definition: Die durch die überall konvergente Potenzreihe

$$\operatorname{Exp} z \;:=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \;=\; 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \ldots$$

definierte Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst *Exponentialfunktion.*

Satz 2.9.1 (Additionstheorem) *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $\operatorname{Exp}(z + w) \;=\; \operatorname{Exp}(z) \cdot \operatorname{Exp}(w)$. Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt also $\operatorname{Exp}(z) \cdot \operatorname{Exp}(-z) = \operatorname{Exp}(0) = 1$ und somit $\operatorname{Exp}(z) \neq 0$.*

Satz 2.9.2 *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\operatorname{Exp} x = e^x$. Insbesondere $\operatorname{Exp}(1) \;:=\; \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \;= \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e = \;2.718281828459045235....$*

Für rein imaginäre Argumente $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$, können wir $\operatorname{Exp}(iy)$ durch Umordnung in Real- und Imaginärteil zerlegen:

$$\operatorname{Exp}(iy) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l y^{2l}}{(2l)!} + i \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l y^{2l+1}}{(2l+1)!} := \operatorname{Cos}(y) + i \operatorname{Sin}(y)$$

Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ erhalten wir: $\operatorname{Exp}(x+iy) = \operatorname{Exp}(x)\operatorname{Exp}(iy) = \operatorname{Exp}(x)(\operatorname{Cos}(y) + i\operatorname{Sin}(y))$

Satz 2.9.3 (Euler) *$\forall \varphi \in \mathbb{R}$ gilt $|\operatorname{Exp}(i\varphi)|^2 = \operatorname{Cos}^2\varphi + \operatorname{Sin}^2\varphi = 1$ und $\operatorname{Exp}(i\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$ wobei $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ sind Real- und Imaginärteil der Zahl $z = e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ und Polarwinkel φ.*

3 Grenzwerte und Stetigkeit der Funktionen

3.1 Grenzwerte

Definition: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}^d, a \in \mathbb{R}^n$. f hat an der Stelle x_0 den **Grenzwert** a, falls für jede Folge $(x_k)_{k\geqslant 1} \subset \Omega\backslash\{x_0\}$ mit $\lim x_k \to x_0$ gilt: $f(x_k) \to a$. Ist dies der Fall, so schreiben wir $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ oder $f(x) \to a$ für $x \to x_0$

Definition: Sei $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Gilt für jede von links her gegen x_0 strebende Folge $(x_k)_k$, (d.h., $x_k < x_0, \forall k$ und $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$) $\lim f(x_k) = a_\ell$, so heisst a_ℓ der **linkseitige Grenzwert** von f beim Punkt x_0. In deisem Fall schreiben wir $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = a_\ell$. Entsprehend ist der **rechtseitige Grenzwert**, $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = a_r$ erklärt.

Fakt: Besitzt die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 den Grenzwert a, so gilt also $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = a$

Satz 3.1.1 ($\varepsilon - \delta$ Definition der Grenzwert) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^d, a \in \mathbb{R}^n$. Es sind äquivalent*
(i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$

(ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \Omega : \quad 0 < ||x - x_0|| < \delta \implies ||f(x) - a|| < \varepsilon.$

Definition: [Grenzwerte im Unendlichen] Ist Ω nach oben unbeschränkt, so **hat** $f(x)$ **für** $x \to \infty$ **den Grenzwert** $a \in \mathbb{R}^n$, falls gilt: $\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0\ \forall x \in \Omega: \quad x > M \implies |f(x) - a| < \varepsilon$. Der Grenzwert a ist dann eindeutig bestimmt, und wir setzen $\lim_{x\to\infty} f(x) := a$.
Entsprehend ist der Grenzwert, $\lim_{x\to-\infty} f(x) := a$, erklärt.

Sei nun f eine Funktion $\Omega \to \mathbb{R}$. Wenn der Funktionswert $f(x)$ für $x \to x_0$ über alle Schranken hinaus wächst, so existiert der Grenzwert im eigentlichen Sinn nicht, aber man sagt:

Definition:[Uneigentliche Grenzwerte] Für $x \to x_0$ **hat** f **den uneigentlichen Grenzwert** ∞, falls gilt:

$$\forall N > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \Omega: \quad 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > N.$$

Ist dies der Fall, so schreiben wir $\lim_{x\to x_0} f(x) := \infty$.

Satz 3.1.2 (Rechnen mit Grenzwerte) *Sind* $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \Omega$, $a, b \in \mathbb{R}$ *mit* $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$ *so gilt*

(i) $\lim_{x\to x_0} \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha a + \beta b, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(ii) $\lim_{x\to x_0} \ f(x)g(x) = ab,$

(iii) $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) = a/b,$ *falls* $b \neq 0$

Bemerkung: Auch mit uneigentlichen Grenzwerten kann man zu einem gewissen Grad rechnen. Die folgenden Regeln gelten für alle $a \in \mathbb{R}$:
$a + \infty = \infty$, $a - \infty = -\infty$, $\infty + \infty = \infty$, $a \cdot \infty = (\operatorname{sgn} a)\, \infty$, $\infty \cdot \infty = \infty$, $\frac{a}{\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0$.
Dagegen kann man den Ausdrücken $0 \cdot \infty$ und $\infty - \infty$ und $\frac{\infty}{\infty}$ genausowenig einen Sinn verleihen wie dem Quotienten $\frac{0}{0}$.

Satz 3.1.3 (Sandwich Satz) *Seien* $f, g, h : \Omega \to \mathbb{R}$ *Funktionen,* $x_0 \in \Omega, a \in \mathbb{R}$.
Ist $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, $\forall x$ *und* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = a$, *so gilt* $\lim_{x\to x_0} g(x) = a$.

Wichtige Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^a \log x = 0 \quad \forall a > 0, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{x^a} = 0 \quad \forall a > 0,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$$

3.2 Stetigkeit

Definition: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, eine Funktion und $x_0 \in \Omega$. f heisst **stetig** an der Stelle $x_0 \in \Omega$, falls für jede gegen x_0 konvergierende Folge $(x_k)_{k\geqslant 1}$ in Ω die Folge $(f(x_k))_{k\geqslant 1}$ konvergent mit Grenzwert $f(x_0)$ ist. D.h.

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(\lim_{k\to\infty} x_k) = f(x_0)$$

Satz 3.2.1 ($\varepsilon - \delta$ Definition der Stetigkeit) *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$. *Es sind äquivalent*
(i) $f(x)$ *ist an der Stelle* x_0 *stetig.*

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in \Omega : \quad 0 < ||x - x_0|| < \delta \implies ||f(x) - f(x_0)|| < \varepsilon.$

Definition: f heisst **stetig** auf Ω, falls f in jedem Punkt $x_0 \in \Omega$ stetig ist.

Beispiel: Die Characteristische Function von $\mathbb{Q}$, $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

besitzt en keiner Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ einen Grenzwert, somit ist sie an keiner Stelle stetig.

Definition: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, f : \Omega \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^n, x_0 \in \mathbb{R}^d$. Dann ist f an der Stelle x_0 **stetig ergänzbar** falls $\lim_{x\to x_0} f(x) =: a$ existiert. Wir setzen in diesem Fall $f(x_0) := a$. Die durch $f(x_0) = a$ ergänzte Funktion f ist offensichtlich stetig an der Stelle x_0.

Beispiel $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ist an der stelle $x = 0$ stetig ergänzbar, mit $f(0) := 1$.

Satz 3.2.2 *Sei $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$ stetig. Dann ist auch die Komposition $g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}^\ell$ stetig.*

Satz 3.2.3 *Sei $f, g \in \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}, x_0 \in \Omega$. Falls f, g in x_0 stetig sind, sind auch $f + g$ und (αf) an der Stelle x_0 stetig. Insbesondere bilden die stetigen Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.*

Satz 3.2.4 *Sei $-\infty < a \leqslant b < \infty$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f([a, b])$ in $\mathbb{R}$ beschränkt und $\exists\, c_-, c_+ \in [a, b] : f(c_+) = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\},\ \ f(c_-) = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$, d.h. Supremum und Infimum werden angenommen.*

3.3 Zwischenwertsatz und Folgerungen

Satz 3.3.1 (Zwischenwertsatz) *Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \leqslant f(b)$. Dann existiert zu jedem $y \in [f(a), f(b)]$ ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$.*

Folge: Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Seien $a, b \in I$ mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann besitzt f eine Nullstelle zwischen a und b.

Satz 3.3.2 *Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige und streng monotone Funktion. Dann ist $J := \mathrm{image}(f)$ wieder ein Intervall und f induziert eine bijektive Funktion $I \to J$, und deren Umkehrfunktion $f^{-1} : J \to I$ ist wieder stetig und streng monoton.*

Beispiel: [Logarithmus] Die Exponentiafunktion $\mathrm{Exp} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{>0}$ ist stetig, streng monotone wachsend mit $\mathrm{Exp}(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ und besitzt die stetige Umkehrfunktion, der **(natürliche) Logarithmus**, $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$. Als Umkehrfunktion erfüllt der Logarithmus

$$\log e^t = t \text{ und } \ e^{\log x} = x, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^{>0}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Das Additionstheorem der Exponentialfunktion impliziert

$$\log xy \ = \ \log x + \log y$$

Die Exponentialfunktion wächst schneller als jedes Polynom: $e^x > \frac{x^n}{n!}$, $x \geqslant 0$
Die Log-Funktion wächst langsamer als jede positive potenz: $\log x < \frac{x^n}{n}$, $\ \forall n > 0$.

Beispie [Potenzfunktion] Die Potenz x^α kann man auch für alle $x \in \mathbb{R}^{>0}$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren durch $x^\alpha \ := \ e^{\alpha \log x}$.

3.4 Funktionenfolgen, punktweise und gleichässige Konvergenz

Definition: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $f, f_k : \Omega \to \mathbb{R}^n$ Funktionen. Die Folge der Funktionen $(f_k)_{k\geqslant 1}$ **konvergiert punktweise** gegen f, falls $\forall x \in \Omega : \lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ (d.h. $\forall x \in \Omega\ \forall \varepsilon > 0\ \exists k_{\varepsilon,x} : \|f_k(x) - f(x)\| < \varepsilon, \forall k > k_{\varepsilon,x}$)
Die Folge $(f_k)_{k\geqslant 1}$ **konvergiert gleichmässig** gegen f, falls $\sup_{x\in\Omega} \|f_k(x) - f(x)\| \to 0,\ (k \to \infty)$ (d.h. $\forall \varepsilon > 0\ \exists k_\varepsilon : \forall k > k_\varepsilon\ \forall x \in \Omega : \|f_k(x) - f(x)\| < \varepsilon$).

Beispiel: Sei $f_k : [0, 1] \to \mathbb{R},\ \ f_k(x) = x^k,\ \ k \geqslant 1$. Dann gilt: $\lim_{k\to\infty} x^k = \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \leqslant x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

Also konvergiert $(f_k)_k$ punktweise gegen $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \leqslant x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$. Insbesondere ist die Grenzwertfunktion $f(x)$ nicht stetig.

Satz 3.4.1 *Sei $f_k : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig und $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ sodass f_k gleichmässig gegen f konvergiert. Dann ist f stetig.*

Satz 3.4.2 *Potenzreihen sind stetig im Innern ihres Konvergenzkreis.*

4 Differentialrechnung

Definition: Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}, \Omega \subset \mathbb{R}, x_0 \in \Omega$. f heisst **differenzierbar an der Stelle** x_0, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0, x \neq x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} := f'(x_0) =: \frac{df(x_0)}{dx}$$

existiert. In diesem Fall heisst $f'(x_0)$ die **Ableitung (Differential)** von f an der Stelle x_0.

Definition: $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ heisst auf Ω differenzierbar, falls f an jeder Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar ist. In diesem Fall heisst die Funktion $x \mapsto f'(x)$ die (erste) **Ableitung von** f.
Bedeutung: Die Funktion f ist also differenzierbar in x_0, wenn sie nahe x_0 durch eine lineare Funktion $T(x)$ approximierbar ist. Die Steigung der Tangente, ist die momentane Änderungsrate von f an der Stelle x_0, also die Ableitung $f'(x_0)$. Stellt f einen Ort als Funktion der Zeit dar, so gibt f' die jeweilige momentane Geschwindigkeit an.

Beispiel: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ ist für $x \neq 0$ differenzierbar mit $f'(x) = \operatorname{sgn}(x)$. Im Punkt $x = 0$ ist sie dagegen nicht differenzierbar.

Satz 4.0.1 *Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $x_0 \in \Omega$, so ist f an der Stelle x_0 auch stetig*

Satz 4.0.2 (Rechen mit Ableitungen) *Sei $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 differenzierbar. Dann sind auch $f + g, f \cdot g$ und falls $g(x_0) \neq 0$ auch die Funktion f/g an der Stelle x_0 differenzierbar und es gilt:*

1. $(af + bg)'(x_0) = af'(x_0) + bg'(x_0), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$
2. $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

Satz 4.0.3 (Kettenregel) *Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $f(x_0) = y_0$ differenzierbar. Dann ist die Funktion $g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 differenzierbar und es gilt*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0).$$

4.1 Mittelwertsatz und Folgerungen

Satz 4.1.1 (Mittelwertsatz) *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann gilt*

$$\exists\, c \in (a, b) : \; f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Satz 4.1.2 *Ist I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(t) = 0$ für alle $t \in I$, so ist f konstant.*

Satz 4.1.3 *Falls $f' \geqslant 0$ (bzw. > 0) auf (a, b), so ist f (streng) monoton wachsend.*

Falls $f' \leqslant 0$ (bzw. < 0) auf (a, b), so ist f(streng) monoton fallend.

Satz 4.1.4 (Regel von Bernoulli – de l'Hôpital) *Seien f und g differenzierbar nahe x_0 mit $g'(x) \neq 0$ überall, so dass die Grenzwerte $\lim_{x\to x_0} f(x)$ und $\lim_{x\to x_0} g(x)$ entweder beide gleich 0 oder beide gleich ∞ sind. Dann gilt*

$$\lim_{x\to x_0} \tfrac{f(x)}{g(x)} \;=\; \lim_{x\to x_0} \tfrac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls die rechte Seite im eigentlichen oder uneigentlichen Sinn existiert. Dasselbe gilt für einseitige Grenzwerte und für $x \to \pm\infty$.

Satz 4.1.5 (Umkehrfunktion) *Ist $f\colon X \to Y$ bijektiv und differenzierbar und überall $f' \neq 0$, so ist die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon Y \to X$ differenzierbar und es gilt für alle $y \in Y$*

$$(f^{-1})'(y) \;=\; \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Beispiele: Die Funktion $\log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit $\log'(x) = \frac{1}{x}$, $\forall x \in (0,\infty)$.
Die verallgemeinerte Potenzfunktion $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \log x}, (\alpha \in \mathbb{R})$ ist differenzierbar und $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.
Die Funktion $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$, $x \mapsto \sin x$ ist bijektiv. Ihre Umkehrfunktion ist der *Arcus Sinus* $[-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $y \mapsto \arcsin y$ mit $(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

4.2 Ableiten von Potezreihen

Definition: Sei $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$. f heisst auf Ω m**-mal differenzierbar**, falls f $(m-1)$-mal differenzierbar ist mit differenzierbarer $(m-1)$-ter Ableitung. In diesem Fall heisst $f^{(m)} = \frac{df^{m-1}}{dx} = \frac{d^m f}{dx^m} : \Omega \to \mathbb{R}$ m**-te Ableitung von** f, und $\forall k, l \geqslant 0$ gilt $f^{(k+l)} = (f^{(k)})^{(l)}$.

f **ist von der Klasse** $C^m(\Omega)$, falls f m-mal differenzierbar ist und die Funktionen $f = f^{(0)}, f' = f^{(1)}, f^{(2)}, ..., f^{(m)}$ stetig sind. f ist in $C^\infty(\Omega)$ falls $f \in C^m(\Omega)$, $\forall m \geqslant 0$.

Satz 4.2.1 *Sei (f_n) eine Folge in $C^1(\Omega)$ mit $f_n \overset{glm.}{\to} f, f_n' \overset{glm.}{\to} g$ $(n \to \infty)$ und $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$. Dann gilt: $f \in C^1(\Omega)$ und $f' = g$.*

Satz 4.2.2 *Die Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k x^k$ mit Konvergenzradius $\rho > 0$ ist im Innern Ihres Konvergenzkreises differenzierbar mit $f'(x) = \sum_{k=1}^\infty k a_k x^{k-1}$.*

4.3 Taylor Formel

Definition[Taylor-Polynom] Sei $f : [c,d] \mapsto \mathbb{R}$ eine Funktion der Klasse $C^m([c,d])$, $a \in [c,d]$. Das **Taylor-Polynom** m**-ter Ordnung** für f mit Entwicklungspunkt a ist

$$T_m f(x;a) := f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + f^m(a)\frac{(x-a)^m}{m!}$$

Der **Restterm** bezeichnen wir mit $R_m f(x;a) := f(x) - T_m f(x;a)$.

Satz 4.3.1 (Taylor Formel) *Sei $f : (c,d) \to \mathbb{R}$ m-mal differenzierbar und $a, x \in (c,d), a < x$. Dann existiert $\zeta \in (a,x)$: $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + f^{m-1}(a)\frac{(x-a)^{m-1}}{(m-1)!} + f^m(\zeta)\frac{(x-a)^m}{(m)!}$*
Falls $f \in C^{m+1}$, dann gilt für den Restterm $|R_m f(x;a)| \leqslant \sup_{a<c<x} |f^{(m+1)}(c)| \frac{|x-a|^{m+1}}{(m+1)!}$

4.4 Extrema

Definition: Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}, \Omega \subset \mathbb{R}$. Ein Punkt $x_0 \in \Omega$ mit der Eigenschaft $\forall x \in \Omega \colon f(x_0) \leqslant f(x)$ heisst eine **Minimalstelle von** f, und der dazugehörige Wert $f(x_0)$ heisst **Minimum von** f.
Ein $x_0 \in \Omega$ heisst (strikte) **lokale Minimalstelle** von f, falls $r > 0$ existiert mit $f(x_0) \leqslant f(x),\ \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r) \backslash \{x_0\}$ (bzw. $f(x_0) < f(x)$).
Durch Umkehren der Ungleichung erhält man die Begriffe **Maximumstelle** und **Maximum von** f. Die gemeinsamen Oberbegriffe lauten **Extremalstelle** und **Extremum**.

Fakt: Jede globale Extremalstelle ist eine lokale Extremalstelle, aber nicht umgekehrt.

Definition: Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f \colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann heisst jede Stelle $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) = 0$ ein **kritischer Punkt von** f

Satz 4.4.1 *Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f \colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist jede lokale Extremalstelle von f ein kritischer Punkt.*

Folgerung: Sei $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann besitzt f ein globales Minimum und ein globales Maximum, und jede globale Extremalstelle ist entweder gleich a oder b oder ein kritischer Punkt der Einschränkung $f|_{(a,b)}$.

Definition: Sei I ein Intervall, und sei $f \colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Die Funktion f heisst **(nach unten) konvex**, falls ihr Graph auf jedem Teilintervall unterhalb der jeweiligen Sekante liegt, d.h., falls für alle Punkte $x_1 < x < x_2$ in I gilt:

$$f(x) \ \leqslant \ f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1).$$

Die Funktion heisst **nach oben konvex** oder **konkav**, falls ihr Graph auf jedem Teilintervall oberhalb der jeweiligen Sekante liegt, also falls die umgekehrte Ungleichung gilt.

Satz 4.4.2 *Ist f zweimal differenzierbar und f'' stetig, so sind äquivalent:*

(a) f ist konvex.

(b) f' ist monoton wachsend.

(c) f'' ist überall $\geqslant 0$.

(d) Der Graph von f liegt oberhalb jeder seiner Tangenten, d.h., für alle x_0, $x \in I$ gilt

$$f(x) \ \geqslant \ f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Fakt: Die Analoga der obigen Aussagen mit den umgekehrten Ungleichungen gelten für die Begriffe (streng) monoton fallend und konkav.

Definition: Ein Punkt $(x_0, f(x_0)) \in \mathrm{graph}(f)$, in dem f von konvex auf konkav wechselt oder umgekehrt, heisst ein **Wendepunkt von** f.

Fakt: Ist f hinreichend differenzierbar, so sind dies nach dem obigen Kriterium genau die Punkte, in denen f'' sein Vorzeichen wechselt, also notwendigerweise eine Nullstelle hat.

Definition: Ein Wendepunkt mit horizontaler Tangente heisst ein **Sattelpunkt von** f.

Satz 4.4.3 *Sei f beliebig oft differenzierbar, und sei $x_0 \in I$. Sei $n \geqslant 2$ so dass gilt $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.*

(a) Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$, so hat f ein lokales Minimum in x_0.

(b) Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) < 0$, so hat f ein lokales Maximum in x_0.

(c) Ist n ungerade, so hat f einen Sattelpunkt in x_0.

5 Integralrechnung

Sei f eine beschränkte Funktion auf einem Intervall $[a, b]$.

Definition: Eine **Partititon** (oder Zerlegung) P von $[a, b]$ besteht aus endlich vielen Punkten $a = b_0 < b_1 < \ldots < b_n = b$. Die **Feinheit** der Partition P ist die Zahl: $\delta(P) := \max\{b_i - b_{i-1} \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Ein **Menge von Zwischenpunkten** zu P ist ein n-Tupel $\zeta = (\zeta_1, \ldots \zeta_n)$ mit $b_{i-1} \leqslant \zeta_i \leqslant b_i$ für alle $1 \leqslant i \leqslant n$. Die **Riemann-Summe von** f bezüglich der Partition P und dem Menge von Zwischenpunkten ζ ist: $S(f, P, \zeta) := \sum\limits_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\,(b_i - b_{i-1})$.

Die Riemannsche Untersumme zu Partition P ist: $\underline{S}(f, P) = \sum\limits_{i=1}^{n} \big(\inf\limits_{x \in [b_{i-1}, b_i]} f(x)\big)\,(b_i - b_{i-1})$.

Die Riemannsche Obersumme zu Partition P ist: $\overline{S}(f, P) = \sum\limits_{i=1}^{n} \big(\sup\limits_{x \in [b_{i-1}, b_i]} f(x)\big)\,(b_i - b_{i-1})$.

Das Untere Riemann Integral von f über $[a, b]$ ist: $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\big\{\underline{S}(f, P) : P \text{ ist eine Partition}\big\}$.

Das Obere Riemann Integral von f über $[a, b]$ ist: $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\big\{\overline{S}(f, P) : P \text{ ist eine Partition}\big\}$.

f heisst **Riemann Integrierbar** über $[a, b]$ falls das obere und das untere Riemann Integrall fallen zusammen. In diesem Fall, nennen wir die Zahl: $\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$ das **Integral von f über** $[a, b]$.

Integrierbarkeitskriterium I Ist f stetig in $[a, b]$, so ist über $[a, b]$ integrierbar.

Integrierbarkeitskriterium II Ist f monoton in $[a, b]$, so ist über $[a, b]$ integrierbar.

Fakt: Sei f integrierbar über $[a, b]$ und sei $P^{(n)}$ eine Folge von Partitionen von $[a, b]$ mit $\lim_{n\to\infty} \delta(P^{(n)}) = 0$ und ζ^n ein Satz von Messpunkten zu $P^{(n)}$. Dann gilt: $\lim_{n\to\infty} S(f, P^{(n)}, \zeta^n) = \int_a^b f(x)\,dx$.

5.1 Eigenschaften

Fakt: Für alle auf den angegebenen Intervallen integrierbare Funktionen f und g gilt:

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_a^c f(x)\,dx &= \textstyle\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx && \text{falls } a < b < c. \\
\textstyle\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx &= \textstyle\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx. \\
\textstyle\int_a^b \lambda f(x)\,dx &= \lambda \cdot \textstyle\int_a^b f(x)\,dx && \text{für jedes } \lambda \in \mathbb{R}. \\
\textstyle\int_a^b f(x)\,dx &\leqslant \textstyle\int_a^b g(x)\,dx && \text{falls } \forall x \in [a, b]\colon f(x) \leqslant g(x). \\
\big|\textstyle\int_a^b f(x)\,dx\big| &\leqslant \textstyle\int_a^b |f(x)|\,dx.
\end{aligned}$$

Fakt: Für jede integrierbare Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ ist das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ gleich dem Flächeninhalt der Teilmenge $\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\big\}$ minus dem Flächeninhalt der Teilmenge $\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| a \leqslant x \leqslant b,\ f(x) \leqslant y \leqslant 0\big\}$.

5.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Definition: Sei f eine auf einem Intervall I definierte Funktion. Dann heisst jede auf I definierte differenzierbare Funktion F mit $F' = f$ eine **Stammfunktion von** f.

Satz 5.2.1 *Sei F eine Stammfunktion von f. Dann ist für jede Konstante c die Funktion $F + c$ eine Stammfunktion von f, und umgekehrt hat jede Stammfunktion von f diese Gestalt.*

Definition: Das unbestimmte Integral von f ist die Menge aller Stammfunktionen von f und wird mit $\int f(x)\,dx$ bezeichnet.

Satz 5.2.2 (Hauptsatz Version A) *Für jede stetige Funktion f auf $[a,b]$ ist die Funktion auf $[a,b]$ $t \mapsto \int_a^t f(x)\,dx$ eine Stammfunktion von f.*

Satz 5.2.3 (Hauptsatz Version B) *Für jede stetige Funktion f auf $[a,b]$ und jede Stammfunktion F von f gilt $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.*

Folgerung: Zur Berechnung eines bestimmten Integrals wählt man also eine Stammfunktion F und berechnet dann die Differenz $F(b) - F(a)$.
Bemerkung: Durch dieselbe Formel kann man den Ausdruck $\int_a^b f(x)\,dx$ auch für Stellen $a \geqslant b$ im Definitionsintervall von f definieren. Dann gilt die weitere Regel

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

5.3 Einfache Integrale

Durch Umkehrung bekannter Ableitungen erhalten wir folgende unbestimmte Integrale:

$$\begin{aligned}
\int x^n\,dx &= \tfrac{x^{n+1}}{n+1} + c && \text{für } n \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0} \text{ und } x \in \mathbb{R} \text{ oder für } n \in \mathbb{Z}^{\leqslant -2} \text{ und } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\
\int x^s\,dx &= \tfrac{x^{s+1}}{s+1} + c && \text{für } s \in \mathbb{C} \setminus \{-1\} \text{ und } x \in (0,\infty) \\
\int \tfrac{1}{x}\,dx &= \log|x| + c && \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\
\int e^x\,dx &= e^x + c && \text{für } x \in \mathbb{R} \\
\int \sin x\,dx &= -\cos x + c, \quad \int \cos x\,dx = \sin x + c && \text{für } x \in \mathbb{R} \\
\int \tfrac{1}{\cos^2 x}\,dx &= \tan x + c, \ \int \tan x\,dx = -\log|\cos x| + c && \text{für } x \in \left(k\pi - \tfrac{\pi}{2}, k\pi + \tfrac{\pi}{2}\right) \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \\
\int \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \arcsin x + c, \ \int \tfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos x + c && \text{für } x \in (-1,1) \\
\int \tfrac{1}{1+x^2}\,dx &= \arctan x + c && \text{für } x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

5.4 Partielle Integration

Dies ist eine Umkehrung der Leibnizschen Produktregel und besagt für das unbestimmte bzw. das bestimmte Integral:

$$\begin{aligned}
\int u(x)v'(x)\,dx &= u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx \\
\int_a^b u(x)v'(x)\,dx &= u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx
\end{aligned}$$

5.5 Substitution

Dies ist quasi eine Umkehrung der Kettenregel und besagt für das unbestimmte Integral:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)\Bigg|_{x=\varphi(y)} = \int f(\varphi(y))\varphi'(y)\,dy$$

für jede stetige Funktion f und jede differenzierbare Funktion φ mit stetiger Ableitung φ' auf einem Intervall, über dem die zusammengesetzte Funktion $y \mapsto f(\varphi(y))$ existiert.

Beispiel: Die Substitution $x = \sin y$ liefert $\int \sin^3 y \cdot \cos y \, dy \;=\; \int x^3 \, dx \;=\; \frac{x^4}{4} + c \;=\; \frac{\sin^4 y}{4} + c.$

5.6 Partialbruchzerlegung

Satz 5.6.1 (Partialbruchzerlegung) *Für beliebige paarweise teilerfremde Polynome $g_1(x), \ldots, g_r(x) \neq 0$ und ein beliebiges weiteres Polynom $f(x)$ existieren eindeutige Polynome $f_i(x)$ vom Grad kleiner als der Grad von $g_i(x)$ sowie ein eindeutiges Polynom $h(x)$, so dass gilt:*

$$\frac{f(x)}{g_1(x) \cdots g_r(x)} \;=\; \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \ldots + \frac{f_r(x)}{g_r(x)} + h(x).$$

Beispiel:

$$\int \frac{dx}{x^3-3x-2} \;=\frac{1}{9}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{9}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x+1)^2} \;=\; \log|x-2|^9 - \log|x+1|^9 + \frac{1}{3(x+1)} + c.$$

Insgesamt reduziert sich die Integration rationaler Funktionen auf die folgenden Fälle.

$$\begin{aligned}
\int t^n \, dt &= \tfrac{t^{n+1}}{n+1} + c \qquad \text{für } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{-1\} \\
\int \tfrac{dt}{t} &= \log|t| + c \\
\int \tfrac{t\,dt}{1+t^2} &= \tfrac{1}{2} \cdot \log(1+t^2) + c, \;\; \int \tfrac{dt}{1+t^2} = \arctan t + c \\
\int \tfrac{t\,dt}{(1+t^2)^n} &= \tfrac{-1}{2n-2} \cdot \tfrac{1}{(1+t^2)^{n-1}} + c \qquad \text{für } n > 1 \\
\int \tfrac{dt}{(1+t^2)^n} &= \tfrac{1}{2n-2} \cdot \tfrac{t}{(1+t^2)^{n-1}} + \tfrac{2n-3}{2n-2} \cdot \int \tfrac{dt}{(1+t^2)^{n-1}} + c \qquad \text{für } n > 1
\end{aligned}$$

5.7 Uneigentliche Integrale

Fakt: Sei f eine integrierbare Funktion auf einem Intervall $[a, b]$. Dann ist die Einschränkung von f auf jedes Teilintervall $[a', b']$ integrierbar, und das Integral $\int_{a'}^{b'} f(x)\,dx$ hängt stetig von a' und b' ab.

Definition: Sei f eine Funktion auf einem offenen Intervall (a, b), deren Einschränkung auf jedes kompakte Teilintervall $[a', b']$ integrierbar ist. Dann ist das *uneigentliche Integral von f von a bis b* definiert als $\int_a^b f(x)\,dx \;:=\; \lim\limits_{a' \searrow a} \lim\limits_{b' \nearrow b} \int_{a'}^{b'} f(x)\,dx$, falls diese Grenzwerte existieren.

Beispiele: $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1, \;\; \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$

Vorsicht: Die beiden Grenzwerte müssen im allgemeinen unabhängig voneinander genommen werden. Zum Beispiel gilt $\int_{-b}^b x\,dx = 0$ für alle $b > 0$ und daher $\lim_{b\to\infty} \int_{-b}^b x\,dx = 0$. Die einzelnen Grenzwerte von $\int_a^b x\,dx$ für $b \to \infty$ oder $a \to -\infty$ existieren dagegen nicht, und somit auch nicht das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^\infty x\,dx$.

Beispiel: Für alle $s \in \mathbb{R}$ und $a > 0$ gilt $\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^s} \;=\; \begin{cases} \frac{a^{1-s}}{s-1} & \text{für } s > 1, \\ \text{divergiert} & \text{für } s \leqslant 1. \end{cases}$

Satz 5.7.1 (Integralkriterium) *Sei $f : [1, \infty) \mapsto \mathbb{R}^+$ monotone fallend. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ genau dann, wenn $\int_1^\infty f(x)dx$ konvergiert. In diesem Fall gilt $0 \leqslant \sum_{k=1}^\infty f(k) - \int_1^\infty f(x)dx \leqslant f(1)$.*

Majorantenkriterium: Ist f auf $[a,\infty)$ stetig, und sind c und $s>1$ so, dass $|f(x)| \leqslant \frac{c}{x^s}$ ist für alle $x \geqslant a$, so konvergiert das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$.

Minorantenkriterium: Ist f auf $[a,\infty)$ stetig, und existiert $c>0$ so dass $f(x) \geqslant \frac{c}{x}$ ist für alle $x \geqslant a$, so divergiert das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ gegen ∞.

Analoge Kriterien gelten für uneigentliche Integrale der Form $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$.

Beispiel: Das Integral $\int_0^\infty \frac{t^2+4}{(1+4t^2)^{3/2}}\,dt$ divergiert, aber $\int_0^\infty \frac{t^2+4}{(1+4t^2)^{5/3}}\,dt$ konvergiert.

Beispiel: Das Integral $\int_2^\infty \frac{dx}{x\cdot(\log x)^s}$ konvergiert für $s>1$ und divergiert für $s \leqslant 1$.

Beispiel: Für alle $a<b$ und $s \in \mathbb{R}$ gilt $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^s} \;=\; \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-s}}{1-s} & \text{für } s<1, \\ \text{divergiert} & \text{für } s \geqslant 1. \end{cases}$

Analoge Kriterien gelten an der oberen Intervallgrenze.

6 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Eine Gleichung, in der Ableitungen einer gesuchte Funktion auftreten, nennt man **Differentialgleichung.** Die **Ordnung** einer DGL ist der Grad der höcsten auftretenden Ableitung.

Definition: Eine Differentialgleichung zusammen mit den Nebenbedingungen $y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)}$ für alle $0 \leqslant k \leqslant n-1$ für einen gegebenen Punkt $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in U$ heisst ein *Anfangswertproblem.*

Definition: Eine Differentialgleichung für eine Funktion $y\colon [x_1,x_2] \to \mathbb{R}$ zusammen mit Nebenbedingungen der Form $y^{(k)}(x_i) = y_i^{(k)}$ für gewisse (k,i) heisst ein *Randwertproblem.*

6.1 Separierbare Differentialgleichungen

Definition: Eine **separierbare** Differentialgleichung ist eine der Form

$$y' = f(x)\cdot g(y).$$

Diese hat einerseits die konstanten Lösungen $y=y_0$ für alle y_0 mit $g(y_0)=0$. Andererseits gilt für eine nichtkonstante Lösung zumindest teilweise $y' \neq 0$ und somit $g(y) \neq 0$. Dort können wir die Variablen separieren durch die formale Umformung

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y) \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \quad\Longleftrightarrow\quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx.$$

Das maximale Definitionsintervall findet man in der Regel am besten am Ende anhand der gefundenen Lösungsformel.

Beispiel: Die Differentialgleichung $y' = 1+y^2$ ist separierbar. Da die rechte Seite überall $\neq 0$ ist, ist jede Lösung lokal invertierbar. Wir finden sie durch die Rechnung

$$\arctan y \;=\; \int \frac{dy}{1+y^2} \;=\; \int dx \;=\; x+c \quad\Longleftrightarrow\quad y = \tan(x+c)$$

für eine Konstante c. Ihr maximales Definitionsintervall ist $\big(c-\frac{\pi}{2}, c+\frac{\pi}{2}\big)$.

Bemerkung: Manchmal kann man eine Differentialgleichung durch Substitution separierbar machen. Speziell wird eine Differentialgleichung der Form $y' = f(\frac{y}{x})$ durch die Substitution $u = \frac{y}{x}$ äquivalent zu

$$u' = (\frac{y}{x})' = \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = \frac{f(u)}{x} - \frac{u}{x} = \frac{f(u)-u}{x},$$

und eine Differentialgleichung der Form $y' = f(ax+by+c)$ durch die Substitution $u = ax+by+c$ äquivalent zu

$$u' = a + by' = a + bf(u)$$

Beispiel: Die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = (x-y+1)^2$ wird durch die Substitution $u = x-y+1$ äquivalent zu

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} = 1-u^2 \quad &\iff \quad \int \frac{du}{1-u^2} = \int dx = x+c \iff \frac{1}{2}\log\left|\frac{u+1}{u-1}\right| = x+c \\ &\iff \quad \frac{u+1}{u-1} = Ke^{2x} \iff u = \frac{Ke^{2x}+1}{Ke^{2x}-1} \iff y = x+1-\frac{Ke^{2x}+1}{Ke^{2x}-1} \end{aligned}$$

für eine Konstante $K = \pm e^c \neq 0$

6.2 Lineare Differentialgleichungen

Definition: Eine *lineare Differentialgleichung* ist eine der Form

$$Ly(x) = a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x).$$

Ist $b(x)$ identisch Null, so heisst die Differentialgleichung **homogen**, andernfalls **inhomogen**.

Satz 6.2.1 *Für je zwei auf I definierte Lösungen y_1 und y_2 der homogenen Gleichung $Ly = 0$ und je zwei Konstanten λ_1 und λ_2 ist auch $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ eine Lösung von $Ly = 0$. Die auf I definierten Lösungen der homogenen Gleichung bilden also einen Vektorraum.*

Bemerkung: Die Elemente einer gewählten Basis dieses Vektorraums heissen **Fundamentallösungen**. Die **allgemeine Lösung** ist dann eine Linearkombination der Fundamentallösungen mit noch zu bestimmenden konstanten Koeffizienten.

Satz 6.2.2 *Für jede auf I definierte Lösung y_p der inhomogenen Gleichung $Ly = b$ und jede auf I definierte n-mal differenzierbare Funktion y_h ist $y_p + y_h$ eine Lösung von $Ly = b$ genau dann, wenn y_h eine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung $Ly = 0$ ist.*

Folge: Die **allgemeine Lösung** einer inhomogenen linearen Differentialgleichung $Ly = b$ findet man, indem man die allgemeine Lösung y_h der zugehörigen homogenen Gleichung $Ly = 0$ zu einer beliebig gewählten *partikulären Lösung* y_p der inhomogenen Gleichung addiert.

Satz 6.2.3 (Superposition Prinzip) *Ist y_j eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $Ly = b_j$ für jedes j, so ist $y_1 + \ldots + y_r$ eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $Ly = b_1 + \ldots + b_r$.*

Satz 6.2.4 *Sei $a_0(x)$ identisch gleich 1, und seien die Funktionen $a_1, \ldots, a_n, b$ stetig. Dann gilt:*

(a) Die auf I definierten Lösungen von $Ly = 0$ bilden einen Vektorraum der Dimension n.

(b) Für jeden Anfangswert besitzt $Ly = b$ eine eindeutige auf ganz I definierte Lösung.

Spezialfall: Betrachte eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung der Form

$$y' = a(x) \cdot y + b(x).$$

Die zugehörige homogene Gleichung $y' = \frac{dy}{dx} = a(x) \cdot y$ ist separierbar. Eine Lösung findet man durch die Rechnung

$$\frac{dy}{y} = a(x)\,dx \qquad \Longleftrightarrow \qquad \log y = \int \frac{dy}{y} = \int a(x)\,dx \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = e^{\int a(x)\,dx}.$$

Da diese Lösung überall definiert und $\neq 0$ ist, ist sie nach dem obigen Satz Basis des eindimensionalen Lösungsraums, also eine Fundamentallösung. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist somit $y(x) = \lambda \cdot e^{A(x)}$ für eine fest gewählte Stammfunktion $A(x) = \int a(x)\,dx$ und eine noch zu bestimmende Konstante λ.
Eine Lösung der inhomogenen Gleichung findet man durch *Variation der Konstanten*, das heisst, durch den Ansatz $y(x) = \lambda(x) \cdot e^{A(x)}$ für eine noch zu bestimmende Funktion $x \mapsto \lambda(x)$. Nach Einsetzen und Ausrechnen wird die inhomogene Gleichung äquivalent zu $\lambda'(x) = b(x) \cdot e^{-A(x)}$. Integrieren und Rückeinsetzen liefert dann die Lösung

$$y(x) = e^{A(x)} \cdot \int b(x)\, e^{-A(x)}\,dx.$$

Für jede Wahl der Stammfunktion $\int b(x)\, e^{-A(x)}\,dx$ ist dies eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist somit

$$y(x) = e^{A(x)} \cdot \int b(x)\, e^{-A(x)}\,dx + \lambda \cdot e^{A(x)}$$

für eine noch zu bestimmende Konstante λ.

6.3 Homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Definition: Sei $Ly = \dfrac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1\dfrac{dy}{dx} + a_0 y = 0, \qquad$ mit $a_i \in \mathbb{C}$. Das zugehörige Polynom $p_L(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0$ heisst das **charakteristische Polynom** von L. Seine Nullstellen in $\mathbb{C}$ heissen **Eigenwerte** von L.

Satz 6.3.1 *Sind $\lambda_1, ..., \lambda_r$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von L mit den entsprechenden Multiplizitäten $m_1, ..., m_r$, so bilden die Funktionen $y_{j,k} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto x^k e^{\lambda_j x}$ für alle $1 \leqslant j \leqslant r$ und $0 \leqslant k < m_j$ ein System von Fundamentallösungen der homogenen DGL $Ly = 0$.*

Bemerkung: Hat L reelle Koeffizienten, so hat jedes Paar komplex konjugierter nicht-reeller Eigenwerte $\alpha_j + i\beta_j$ dieselbe Multiplizität m_j. Die entsprechenden Fundamentallösungen $x^k e^{(\alpha_j \pm i\beta_j)x} = x^k e^{\alpha_j x}(\cos\beta_j x \pm i \sin\beta_j x)$ für $0 \leqslant k < m_j$ kann man somit per Basiswechsel ersetzen durch die Lösungen

$$x^k e^{\alpha_j x} \cos\beta_j x \qquad \text{und} \qquad x^k e^{\alpha_j x} \sin\beta_j x.$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} & y^{(4)} + 2y'' + y = 0 \\ \Rightarrow \quad & p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2+1)^2 = (\lambda - i)^2(\lambda + i)^2 = 0 \\ \Rightarrow \quad & y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 x \cos x + c_4 x \sin x. \end{aligned}$$

6.4 Inhomogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Betrachte eine inhomogene DGL der Form $Ly = b$.
Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten löst man durch expliziten Ansatz und Koeffizientenvergleich.

Ansatzmethode

Störfunktion $b(x)$	Zugehöriger Ansatz für $y_p(x)$
$ae^{\mu x}$	$be^{\mu x}$
$a\sin(\nu x)$ $b\cos(\nu x)$	$c\sin(\nu x) + d\cos(\nu x)$
$ae^{\mu x}\sin(\nu x)$ $be^{\mu x}\cos(\nu x)$	$e^{\mu x}(c\sin(\nu x) + d\cos(\nu x))$
$P_n(x)e^{\mu x}$	$R_n(x)e^{\mu x}$
$P_n(x)ae^{\mu x}\sin(\nu x)$ $P_n(x)be^{\mu x}\cos(\nu x)$	$e^{\mu x}(R_n(x)\sin(\nu x) + S_n(x)\cos(\nu x))$

wobei P_n, Q_n, R_n, S_n Polynome vom Grad n in x sind.

Bemerkung: Liegt eine Linearkombination der Störfunktionen vor, so hat man wegen dem *Superpositionsprinzip* als Ansatz eine entsprechende Linearkombination zu wählen.

Bemerkung: Falls $\lambda = \mu + i\nu$ eine m-fache Nullstelle des charakteristischen Polynom $p_L(\lambda)$ ist, so muss man den Ansatz für $y_p(x)$ mit dem Faktor x^m multiplizieren

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
& y'' + y = \sin x \\
\Rightarrow\quad & p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_{1,2} = \pm i \\
\Rightarrow\quad & y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x.
\end{aligned}
$$

Für die partikuläre Lösung nehmen wir als Ansatz

$$y_p = x(K_1 \cos x + K_2 \sin x).$$

Einsetzen and koffizienenvergleich liefert $K_1 = -\frac{1}{2},\ K_2 = 0$ und somit $y_p = -\frac{1}{2}x\cos x$.

Die allgemeine Lösung ist $y_{all} = y_h + y_p = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2}x\cos x$.

6.5 Zusatzbedingungen

Die in der allgemeinen Lösung einer DGL n-ter Ordnung auftretenden Parameter lassen sich durch **Zusatzbedingungen** festlegen.

Beispiel:

$$y'' + y' - 6y = 10e^{2x} \qquad \text{mit} \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 7.$$

Die inhomogene DGL hat die allgemeine Lösung

$$y_{all} = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x} + 2xe^{2x}.$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen liefert $c_1 = -1,\ c_2 = 1$ und somit $y = -e^{-3x} + e^{2x} + 2xe^{2x}$.