Analysis II für D-INFK

Zusammenfassung

ETH Zürich HS 2017

Prof. Özlem Imamoglu[1]

23. Januar 2018

[1]Dept. of Mathematics, ETH Zürich, CH-8092 Zürich ozlem@math.ethz.ch

Inhaltsverzeichnis

1 Differentialrechung

1.1 Grenzwert und Stetigkeit

Definition: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^m$ eine Funktion, $\zeta \in \Omega$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Für $x \to \zeta$ *hat* f *den Grenzwert* b falls gilt $\lim_{||x-\zeta|| \to 0} ||f(x) - b|| = 0$. Ist dies der Fall schreiben wir $\lim_{x \to \zeta} f(x) = b$.
f heisst *stetig* an der Stelle ζ falls gilt: $\zeta \in \Omega$ und $\lim_{x \to \zeta} f(x) = f(\zeta)$.
f ist *stetig* auf Ω falls gilt: $\forall \zeta \in \Omega$, $\lim_{x \to \zeta} f(x) = f(\zeta)$.

$\varepsilon - \delta$ *Definition der Stetigkeit:* Eine Funktion f ist stetig an der Stelle ζ, falls gilt:
$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in \Omega \colon ||x - \zeta|| < \delta \implies ||f(x) - f(\zeta)|| < \varepsilon$.

Theorem 1.1.1 *Falls* $\lim_{x \to \zeta} f(x) = b$ *und* $\lim_{x \to \zeta} g(x) = c$, *dann gilt*

1. $\lim_{x \to \zeta} [\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha b + \beta c, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
2. $\lim_{x \to \zeta} f(x) \cdot g(x) = b \cdot c$
3. $\lim_{x \to \zeta} ||f(x)|| = ||b||$

Beispiel: Jede Linear Transformation $T \colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ ist stetig $\forall \zeta \in \mathbb{R}^n$
Beispiel: Jede Polynom $P \colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $P(x) = \sum_{k_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{k_n=0}^{m_n} c_{k_1 \cdots k_n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$ ist überall stetig.
Beispiel: Jede Rational Funktion $f \colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = P(x)/Q(x)$ wobei $P(x), Q(x)$ Polynomen sind, ist stetig in jedem Punkt ζ mit $Q(\zeta) \neq 0$.

Theorem 1.1.2 *Sei* $f \colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ *ein Vektorfeld mit Komponenten* $f_i \colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ *so dass* $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$. *Dann ist* f *stetig an der Stelle* ζ *genau dann wenn jedes* f_i *stetig in* ζ *ist.*

Theorem 1.1.3 *Seien* f *und* g *zwei Funktionen, so dass an der Stelle* ζ, $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ *definiert ist. Falls* g *stetig in* ζ *ist und* f *stetig in* $g(\zeta)$ *ist, dann ist* $f \circ g$ *stetig in* ζ.

Beispiel: Eine Funktion mehrerer Variablen kann in jeder Variable stetig sein, ohne als Funktion mehrerer Variablen stetig zu sein.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Die Funktion$f(x, 0) = 0$, als eine Funktion von nur x ist stetig in $x = 0$ (resp. $f(0, y)$ ist stetig in $y = 0$) aber $f(x, y)$ ist nicht stetig in $(0, 0)$.

Um die Grenzwerte der Skalarfelder zu berechnen kann das *Sandwich theorem* nützlich sein

Theorem 1.1.4 *Seien* $f, g, h \colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ *mit* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, $\forall x$.
Falls $\lim_{x \to \zeta} f(x) = \lim_{x \to \zeta} h(x) = L$, *dann gilt* $\lim_{x \to \zeta} g(x) = L$.

Beispiel:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Da $0 \leqslant |f(x, y)| \leqslant |y|$, $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 0$ und somit ist f stetig an der Stelle $(0, 0)$.

1.2 Die Partiell Ableitung und das (Total) Differential für die Skalarfelder

Definition: Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\zeta \in \Omega$, $y \in \mathbb{R}^n$ und $f\colon \Omega \mapsto \mathbb{R}$ ein Skalarfeld . *Die Ableitung von f in $x = \zeta$ nach y*, bezeichnet mit $f'_y(\zeta)$ oder $D_y f(\zeta)$, ist definiert als

$$f'_y(\zeta) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\zeta + hy) - f(\zeta)}{h}$$

falls die rechte Seite existiert.

Falls $y = e$ ein Einheitsvektor ist dann heisst die Ableitung $f'_e(\zeta) = D_e f(\zeta)$ *die Richtungbleitung von f in der Richtung e im Punkt $x = \zeta$* .

Falls $e = e_i = (0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$, das Standard i-ten Einheitsvektor ist, heisst die Richtungableitung f_{e_i} *die i-te partiell Ableitung von f* oder *die partiell Ableitung von f nach x^i*. Sie ist mit $D_i f(\zeta)$ oder $\frac{\partial f}{\partial x^i}(\zeta)$ bezeichnet, wobei $x = (x^1, \ldots, x^n)$ ist.

Die Funktion f ist partiell differenzierbar nach x^i im Punkt $a = (a^1, \ldots, a^n)$ (i.e $\frac{\partial f}{\partial x^i}(a)$ exists), wenn die Funktion $x^i \mapsto f(\zeta^1, \ldots, \zeta^{i-1}, x^i, \zeta^{i+1}, \ldots, \zeta^n)$ im Punkt ζ^i differenzierbar ist.

Theorem 1.2.1 *Sei $g(t) := f(\zeta + te)$. Falls $g'(t)$ oder $D_e f(\zeta)$ existiert dann existiert die andere und $g'(t) = D_e f(\zeta)$. Insbesondere gilt $D_e f(\zeta) = g'(0) = \frac{d}{dt} f(\zeta + te)|_{t=0}$*

Beispiel Für eine Funktion mehrerer Variablen f, kann die Richtungableitung von f im Punkt ζ in jede Richtung e existiert ohne die Funktion f stetig im Punkt ζ zu sein.

Seien $e = (a, b)$ ein Einheitsvektor und $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

Dann existiert die Richtungableitung von f im Punkt 0 in jede Rictung e. $D_e f(0, 0) = b^2/a$ wenn $a \neq 0$ und $D_e f(0, 0) = 0$ wenn $a = 0$. Aber f ist nicht stetig im $(0, 0)$.

Für Funktionen mehrere Variablen gibt das total Differential ein starkere differentierbarkeit Kriterium.

Definition Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ ist im Punkt $\zeta \in \mathbb{R}^n$ *(total) differentierbar* falls eine lineare Abbildung $A = A_\zeta\colon \mathbb{R}^n \mapsto R$ existiert so dass

$$\lim_{x \to \zeta} \frac{|f(x) - f(\zeta) - A(x - \zeta)|}{||x - \zeta||} = 0$$

Falls das der Fall ist, heisst die lineare Abbildung $A_\zeta\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ *total Ableitung* oder *differential* von f in Punkt ζ und sie wird mit $df(\zeta)$ oder $d_\zeta f$ bezeichnet.
f heisst *(total) differentierbar* im Ω falls sie differenzierbar in jedem Punkt $\zeta \in \Omega$.

Bemerkung Falls f im Punkt ζ differenzierbar ist , dann existiert eine realwertige Funktion $R(x, \zeta)$ so dass

$$f(x) = f(\zeta) + (d_\zeta f)(x - \zeta) + R(x, \zeta)$$

mit $\lim_{x \to \zeta} \frac{R(x,\zeta)}{||x - \zeta||} = 0$

Bemerkung Das Differential von $f\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ im Punkt ζ ist NICHT ein Zahl. Es ist eine lineare Abbildung $d_\zeta f\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. Somit hat es eine Matrix Darstellung. Sei $(a_1, \ldots a_n)$ die Matrixdarstellung bezüglich der Standard Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ von $\mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$f(x^1, \ldots, x^n) = f(\zeta^1, \ldots, \zeta^n) + a_1(x^1 - \zeta^1) + \cdots + a_n(x^n - \zeta^n) + R(x, \zeta)$$

Bemerkung: *Geometrische Interpretation.* Ist f is differenzierbar in $\zeta = (\zeta^1, \ldots, \zeta^n)$, so ist

$$y \;=\; f(\zeta) + a_1{\cdot}(x^1 - \zeta^1) + \ldots + a_n{\cdot}(x^n - \zeta^n)$$

die Gleichung der *tangentialhyperebene* an Graph von f im Punkt $(\zeta^1, \ldots, \zeta^n, f(\zeta)) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Beispiel Jede Affine-lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto Ax + b$, mit A ein $1 \times n$ Matrix, und $b \in \mathbb{R}$, ist differentierbar in jedem Punkt $\zeta \in \mathbb{R}^n$. Das total Differential ist gegeben durch die lineare Abbildung $d_\zeta f\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto Ax$

Theorem 1.2.2 *Sei f differenzierbar in ζ mit Differential $d_\zeta f\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. Dann existiert nach jeder Vektor $y \in \mathbb{R}^n$, $f'_y(\zeta)$, die Ableitung von f in ζ, und es gilt $(d_\zeta f)(y) = f'_y(\zeta)$.*
Insbesondere existiert alle partielle Ableitungen von f in $x = \zeta$ und es gilt $(d_\zeta f)(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(\zeta)$.
Die matrix Darstellung von $d_\zeta f\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ bezüglich der standard Basis ist

$$(a_1, \ldots, a_n) = (\frac{\partial f}{\partial x^1}(\zeta), \frac{\partial f}{\partial x^2}(\zeta), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(\zeta))$$

Definition Der Vektor der partielle Ableitungen

$$(\frac{\partial f}{\partial x^1}(\zeta), \frac{\partial f}{\partial x^2}(\zeta), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(\zeta))$$

heisst *Gradient* von f und wird mit $\nabla f(\zeta)$ oder $\mathrm{grad}(f)$ bezeichnet.

Bemerkung: Ist f total differenzierbar in ζ, so existiert die Richtungsableitung in jede Richtung e und ist gegeben durch das Skalarprodukt von $\nabla f(\zeta)$ mit dem Vektor e, ie. $D_e f(\zeta) = \nabla f(\zeta) \cdot e$

Geometrische Interpretation: Ist der Gradient ungleich Null, so zeigt er die Richtung an, in der f am schnellsten wachst.

Theorem 1.2.3 *Sei $f\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ ein Skalarfeld. Ist f differenzierbar in $x = \zeta$ so ist sie stetig in $x = \zeta$.*

Beispiel: Die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}, & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0, \end{cases}$$

besitzt die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ aber ist nicht stetig in $(0,0)$ und ist auch nicht total differenzierbar.

Beispiel: Die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & \text{for } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{for } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

besitzt die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, und ist stetig in $(0,0)$, aber ist nicht differenzierbar in $(0,0)$.

Beispiel: Die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2+y^2}, & \text{for } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{for } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ist total differenzierbar mit $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

Theorem 1.2.4 *(A sufficient condition for differentiability) Sei $f\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ ein Skalarfeld. Falls alle ihre partielle Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x^1}, \ldots \frac{\partial f}{\partial x^n}$ in eine Umgebung von ζ existieren und stetig in ζ sind dann ist f differenzierbar in ζ.*

Definition; Eine Funktion $f\colon \Omega \mapsto \mathbb{R}$ heisst eine C^1-Funktion (oder *stetigdiffernzierbar*) falls für alle $\zeta \in \Omega$ und $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\frac{\partial f}{\partial x^i}(\zeta)$ existieren und die Funktionen $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$ stetig sind.

1.3 Differentiationsregeln

Theorem 1.3.1 *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $f, g\colon \Omega \mapsto \mathbb{R}$ differenzierbar in ζ.Dann sind $f+g$ und $f \cdot g$ differenzierbar in ζ und*

1. $d(f+g)(\zeta) = df(\zeta) + dg(\zeta)$
2. $d(fg)(\zeta) = df(\zeta) \cdot g(\zeta) + f(\zeta) \cdot dg(\zeta)$
3. *Falls $g(\zeta) \neq 0$ dann ist f/g differenzierbar in ζ und*

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(\zeta) = \frac{g(\zeta)\cdot df(\zeta) - f(\zeta)\cdot dg(\zeta)}{(g(\zeta))^2}$$

Theorem 1.3.2 *(Kettenregel I) Seien $f\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ differenzierbar in ζ und $g\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ differenzierbar in $f(\zeta)$. Dann ist die Funktion $g \circ f\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ differnzierbar in ζ und $d(g\circ f)(\zeta) = g'(f(\zeta))df(\zeta)$*

Definition: Seien $I \subset \mathbb{R}$ und $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)\colon I \mapsto \mathbb{R}^n$ eine Funktion. g heisst *differenzierbar* in $a \in \mathbb{R}$ falls jede $g_i\colon I \mapsto \mathbb{R}$ differenzierbar in a sind. Ist dies der fall, dann gilt $g'(a) = (g_1'(a), g_2'(a), \ldots, g_n'(a))$.

Theorem 1.3.3 *(Kettenregel II) Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$, $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)\colon I \mapsto \Omega$ und $f\colon \Omega \mapsto \mathbb{R}$. Ist g differenzierbar in a und f differenzierbar in $g(a)$, so ist die Funktion $f \circ g\colon I \mapsto \mathbb{R}$ differenzierbar in a mit der Ableitung*

$$\frac{d}{dt} f\circ g(t) = df(g(a))\cdot g'(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(g(a))\right)\left(\frac{dg_1}{dt}(a)\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial x^2}(g(a))\right)\left(\frac{dg_2}{dt}(a)\right) + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x^n}(g(a))\right)\left(\frac{dg_n}{dt}(a)\right)$$

Theorem 1.3.4 *(Ableiten unter dem Integral) Seien $h\colon \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktion von 2 Variablen und $b\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion einer Variable. Dann ist die Funktion $u(t) := \int_a^{b(t)} h(s,t)ds$ differenzierbar mit der Ableitung*

$$u'(t) = h(b(t), t)b'(t) + \int_a^{b(t)} \frac{\partial h}{\partial t}(s,t)ds.$$

Insbesondere falls $u(t) := \int_a^b h(s,t)ds$, dann gilt $u'(t) = \int_a^b \frac{\partial h}{\partial t}(s,t)ds$.

Beispiel Um das Integral $\int_0^1 \frac{x^5-1}{\log x}dx$ zu berechnen, seien $h(\alpha, x) = \frac{x^\alpha - 1}{\log x}$ und $u(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^\alpha-1}{\log x}dx$. Dann gelten $\frac{\partial h}{\partial \alpha} = x^\alpha$ und $u'(\alpha) = \int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}$. Somit $u(\alpha) = \log(\alpha+1) + C$, für eine noch zu bestimmende Konstante C. Aber $u(0) = \int_0^1 \frac{x^0-1}{\log x}dx = 0 = \log 1 + C$ und somit $u(\alpha) = \log(\alpha+1)$ und $\int_0^1 \frac{x^5-1}{\log x}dx = \log 6$.

1.4 Höhere Ableitungen, Hessian und die Taylorentwicklung

Höhere partielle Ableitungen hängen, im allgemeinen, von der Reihenfolge ab.
Beispiel:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Dann gilt $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Wenn f von der Klasse C^2 ist, (ie f ist zweimal stetig differenzierbar) dann gilt

Theorem 1.4.1 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und sei $f\colon \Omega \mapsto \mathbb{R}$ eine Funktion von der Klasse $C^2(\Omega)$. Dann gilt für alle $1 \leqslant i, j \leqslant n$*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}.$$

Definition Eine Funktion f heisst k mal stetig differenzierbar oder eine C^k-Funktion wenn sie k mal differenzierbar ist und ihre k-ten partiellen Ableitungen stetig sind.

Theorem 1.4.2 *Für jede C^k-Funktion sind alle partiellen Ableitungen vom Grad $\leqslant k$ von der Reihenfolge der Ableitungen unabhängig.*

Definition Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $f \colon \Omega \mapsto \mathbb{R}$. Falls die 2-ten partiellen Ableitungen von f existieren in $\zeta \in \Omega$, dann heisst die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen die *Hessian Matrix* von f . Sie wird mit $\mathrm{Hessian}_f(\zeta)$ oder $\mathrm{Hess}_f(\zeta)$ oder $\nabla^2(f)(\zeta)$ bezeichnet.

$$\mathrm{Hessian}_f(\zeta) := \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\zeta)\Big)_{i,j=1..n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\zeta) & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\zeta) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\zeta) & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(\zeta) \end{pmatrix}$$

Beispiel: Sei $f(x, y, z) = x^2 y + z$. Dann gilt

$$\mathrm{Hessian}_f(x, y, z) := \begin{pmatrix} 2y & 2x & 0 \\ 2x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Theorem 1.4.3 *(Die Taylorentwicklung vom Grad 2) Sei $f \colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbaren in $\zeta = (\zeta^1, \ldots \zeta^n)$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\zeta) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(\zeta)(x^i - \zeta^i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(\zeta)\,(x^i - \zeta^i)\,(x^j - \zeta^j) + R_2(x, \zeta) \\ &= f(\zeta) + \nabla f(\zeta) \cdot (x - \zeta) + \frac{1}{2}(x - \zeta) \cdot \nabla^2 f(\zeta) \cdot (x - \zeta)^T + R_2(x, \zeta), \end{aligned}$$

wobei $\lim_{x \to \zeta} \frac{|R_2(x,\zeta)|}{||x - \zeta||^2} = 0$

1.5 Extrema von Skalarfelder

Definition: Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $f \colon \Omega \mapsto \mathbb{R}$. Ein Punkt $a \in \Omega$ heisst *lokal maximum* (resp. lokal minimum) von f wenn eine Umgebung $B_a(r) := \{x \in \mathbb{R} \colon ||x - a|| < r\} \subset \Omega$ existiert so dass $f(x) \leqslant f(a)$ (resp. $f(x) \geqslant f(a)$) $\forall x \in B_a(r)$. Ein *lokal Extremum* ist ein Punkt $a \in \Omega$, der entweder eine lokale minimalstelle oder eine lokale maximalstelle ist.

Theorem 1.5.1 *Falls f differenzierbar ist und a eine lokale extremalstelle von f ist, dann gilt $\nabla f(a) = 0$.*

Definition: Ein *stationär Punkt* oder *ein kritischer Punkt* von f ist ein Punkt a, mit $\nabla f(a) = 0$. Ein kritischer Punkt heisst ein *sattlepunkt* falls er kein lokale Extrema ist.

Beispiel: Die Funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$ hat nur ein kritischer Punkt $a = (0, 0)$ und er ist ein Sattelpunkt.

Theorem 1.5.2 *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f \colon \Omega \mapsto \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion und a ein Inneren Punkt von Ω. Falls a ein kritischer Punkt von f mit $\det(Hess_f(a)) \neq 0$, dann gilt*

1. *Falls $Hess_f(a) > 0$ (i.e. a positive definite Matrix), dann ist a lokale Minimalstelle.*
2. *Falls $Hess_f(a) < 0$ (i.e. a negative definite Matrix), dann ist a lokale Maximalstelle. .*
3. *a ist ein Sattelpunkt, sonnst (i.e. $Hess_f(a)$ ist ein indefinite Matrix).*

In $\mathbb{R}^2$ haben wir

Theorem 1.5.3 *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $f\colon \Omega \mapsto \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion, und a ein Innerepunkt von Ω. Falls a ein kritischer Punkt von f mit $\det(Hess_f(a)) \neq 0$, dann gilt*

1. *Falls $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ und $\det(Hess_f(a)) > 0$, dann ist a lokale Minimalstelle.*
2. *Falls $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ und $\det(Hess_f(a)) > 0$, dann ist a lokale Maximalstelle. .*
3. *Falls $\det(Hess_f(a)) < 0$, dann ist a ein Sattelpunkt.*

Beispiel: Sei $f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2$. Dann ist $\nabla f = (2(x-1), 2(y+2), 2(z+1))$ und somit hat f nur ein kritischer Punkt $(x,y,z) = (1,-2,-1)$. Die Hesse Matrix im Punkt (1,-2,-1) ist $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Er ist positive definite. Somit ist $(1,-2,-1)$ ein lokal minimum.

Beispiel: Sei $f(x,y) = x \sin y$. Wenn $\nabla f = (\sin y, x\cos y) = (0,0)$, dann gilt $(x,y) = (0, \pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 0 & \cos y \\ \cos y & -x \sin y \end{pmatrix}$. Im kritischer Punkt $(x,y) = (0,\pi k)$, $\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$. Die Hesse Matrix ist indefinite. Somit ist jeder kritischer Punkt ein Sattlepunkt.

Um die globales Extrema von ein Skalarfeld f auf einer kompakten Menge Ω zu bestimmen haben wir

Theorem 1.5.4 *Sei f differenzierbar im Inneren von Ω. Jede globale Extremalstelle von f ist entweder ein kritischer Punkt im Inneren von Ω oder liegt auf dem Rand von Ω.*

Beispiel: Sei $f(x,y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$, sei Ω, von den Geraden $x = 0, y = 0$ and $y = 9 - x$ begrenzte Dreieck, das im ersten Quadrant liegt. f besitzt einen kritischen Punkt im Inneren Ω, nämlich $(1,1)$. Auf der Gerade $y = 0$, ist $f(x,0) = 2 + 2x - x^2$. Die Extremalstelle kann entweder in $x = 0$ oder $x = 9$ oder in einem Punkt mit $f'(x,0) = 2 - 2x = 0$ liegen. Im Punkt $x = 0$, $f(0,0) = 2$, und im Punkt $x = 9$, $f(9,0) = -61$ und in $x = 1$, $f(1,0) = 3$. Ähnlicherweise, gibt die Gerade $y = 0$ $f(0,0) = 2, f(0,9) = -61, f(0,1) = 3$ und die Gerade $y = 9 - x$ gibt $f(9/2, 9/2) = -41/2$. Somit hat f ihre globale Maximalstelle im Punkt $(1,1)$, und $f(1,1) = 4$ und hat das globale Minimum -61 in den Punkten $(0,9), (9,0)$ auf dem Rand von Ω.

1.6 Vektorwertige Funktionen

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : \Omega \to \mathbb{R}^m$.

Definition: Die Funktion f heisst *k-mal differenzierbar*, resp. *k-mal stetig differenzierbar,* falls jede Komponentenfunktion $f_i\colon \Omega \mapsto \mathbb{R}$ k-mal differenzierbar, resp. k-mal stetig differenzierbar, sind.

Definition: Wenn f differenzierbar ist, dann die Matrix der partielle Ableitungen

$$df = \nabla f \;:=\; \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

heisst die *Funktional Matrix* oder die *Jacobi-Matrix von f*. Die Zeilen dieser Matrix sind genau die Gradienten ∇f_i der Komponentenfunktionen.

Bemerkung: Die differenzierbarkeit von f im Punkt $\zeta \in \Omega$ bedeudet dass eine linear Abbildung $df_\zeta \colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ existiert mit

$$\lim_{x\to\zeta} \frac{||f(x) - f(\zeta) - df_\zeta(x-\zeta)||}{||x-\zeta||} = 0.$$

Die Matrix dieser Lineare Abbildung ist die Jacobi Matrix $\nabla f(\zeta)$. Für $x \to \zeta$ gilt

$$f(x) \;=\; f(\zeta) + \nabla f(\zeta)\cdot(x-\zeta) + o(|x-\zeta|).$$

Beispiel: Fü jeder Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ und jede $m \times n$-Matrix A ist die affin lineare Funktion

$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ x \mapsto b + A\cdot x$$

differenzierbar mit $\nabla T = A$. Insbesondere ist die identitätsfunktion

$$\mathrm{id}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto x$$

differenzierbar und $\nabla\,\mathrm{id}$ ist die Einheitsmatrix.

Beispiel: (Zylinderkoordinaten)
$f\colon [0,\infty)\times[0,2\pi]\times\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$, $(r,\vartheta,z) \mapsto (r\cos\vartheta, r\sin\vartheta, z)$ ist differentierbar mit Jacobi Matrix $df = \nabla f = \begin{pmatrix}\cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0\\ \sin\vartheta & r\cos\vartheta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ and $\det(\nabla(f)) = r$

Beispiel: (Kugelkoordinaten)
$f\colon [0,\infty)\times[0,2\pi]\times[-\pi/2,\pi/2] \mapsto \mathbb{R}^3$, $(r,\vartheta,\varphi) \mapsto (r\cos\vartheta\cos\varphi, r\sin\vartheta\cos\varphi, r\sin\varphi)$ ist differentierbar mit Jacobi Matrix $df = \nabla f = \begin{pmatrix}\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\cos\varphi & -r\cos\vartheta\sin\varphi\\ \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi\\ \sin\varphi & 0 & r\cos\varphi\end{pmatrix}$ und $\det(\nabla(f)) = r^2\cos\varphi$.
Bemerkung: Die Kugelkoordinaten kann man auch mit $(r,\vartheta,\varphi) \mapsto (r\cos\vartheta\sin\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\varphi)$ definieren. Dann gilt $\det(\nabla(f)) = r^2\sin\varphi$.

Wir haben die folgende Differentiationregeln

Theorem 1.6.1 *Seien $f, g\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $\zeta \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann sind die Funktionen $\alpha f, f+g$ sowie das Skalar Produkt $f \cdot g = \sum_{i=1}^m f_i g_i$ differenzierbar und gelten*

1. $\nabla(\alpha f)(\zeta) = \alpha\nabla f(\zeta)$
2. $\nabla(f+g)(\zeta) = \nabla f(\zeta) + \nabla g(\zeta)$
3. $\nabla(f\cdot g)(\zeta) = f(\zeta)\cdot\nabla g(\zeta) + g(\zeta)\cdot\nabla f(\zeta)$

Theorem 1.6.2 *(Kettenregel) Seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ differenzierbare Funktionen, $X \subset \mathbb{R}^n$ und $Y \subset \mathbb{R}^m$ und $Z \subset \mathbb{R}^\ell$. Dann ist $g \circ f\colon X \to Z$ differenzierbar und*

$$\nabla(g\circ f)(x) = \nabla g(f(x))\cdot\nabla f(x).$$

Sind f und g k-mal differenzierbar sind, resp k-mal stetig differenzierbar, dann so ist $f \circ g$.

Beispiel: Die Polarkoordinaten Funktionen sind, ausserhalb des Ursprungs, gegeben durch zueinander inversen Funktionen

$$f\colon \binom{r}{\varphi} \mapsto \binom{r\cos\varphi}{r\sin\varphi} \qquad \text{and} \qquad g\colon \binom{x}{y} \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \arg(x+iy) \end{pmatrix}.$$

Deren Funktionalmatrizen sind

$$\nabla f\binom{r}{\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad \nabla g\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Die Kompositonen $g \circ f$ und $f \circ g$ sind gleich der identischen Funktion und $\nabla g \cdot \nabla f = \nabla \mathrm{id} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\nabla f \cdot \nabla g = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

2 Kurvenintegral

2.1 Definitionen, Beispiele und Eigenschaften

Definition: Sei $I = [a,b] \in \mathbb{R}$ ein eingeschlossene Intervall. Eine *stetige Kurve* in $\mathbb{R}^n$ ist eine stetige Funktion $\gamma\colon I \mapsto \mathbb{R}^n$. Wenn die Ableitung $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \ldots, \gamma_n'(t))$ existiert und auf dem Intervall (a,b) stetig ist, heisst die Kurve *glatt.* $\gamma(t)$ ist eine Parametrisierung der Kurve $\mathrm{Im}(\gamma)$. Die Kurve heisst *stückweise glatt* wenn es eine Partition $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ von $[a,b]$ gibt, so dass γ auf jedem Intervall $[t_{i-1}, t_i]$ für $i = 1, \ldots, n$ glatt ist.

Definition: Die entlang γ durch den Vektor γ' bestimmte Richtung heisst *Orientierung* von γ. $\gamma(a)$, resp. $\gamma(b)$, heisst *Anfangspunkt* resp. *Endpunkt* von γ.

Wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$, heisst γ eine *geschlossene Kurve.*

Definition: Sei $\vartheta\colon [c,d] \mapsto [a,b]$ eine C^1-Funktion so dass $\vartheta(c) = a$, $\vartheta(d) = b$ und $\vartheta'(t) > 0$ $\forall t \in [c,d]$. $\gamma \circ \vartheta\colon [c,d] \mapsto \Omega$ heisst ein *orientierungserhaltende Umparametrisierung* von γ.

Bemerkung: Sei $\gamma\colon [a,b] \mapsto \Omega$. Die Kurve $-\gamma\colon [a,b] \mapsto \Omega$ die durch $(-\gamma)(t) := \gamma(a+b-t)$ definiert ist, ist die gleiche Kurve mit der umgekehrten Orientierung.

Definition: Seien $\gamma\colon [a,b] \mapsto \Omega$ und $\alpha\colon [c,d] \mapsto \Omega$ zwei Kurven mit $\gamma(b) = \alpha(c)$. Die Kurve $\gamma + \alpha$ ist definiert durch

$$\gamma + \alpha := \begin{cases} \gamma(t) & t \in [a,b] \\ \alpha(t-b+c) & t \in [b, d+b-c]. \end{cases}$$

Beispiel: $\gamma\colon [0,1] \mapsto \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (a_1 + b_1 t, a_2 + b_2 t, a_3 + b_3 t)$ ist eine Parametrisierung der Strecke in $\mathbb{R}^3$ durch den Punkt (a_1, a_2, a_3) in der Richtung (b_1, b_2, b_3).

Beispiel: $\gamma\colon [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (a\cos t, b\sin t)$ ist eine Parametrisierung der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. $\alpha\colon [0,2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (a\cos(2\pi - t), b\sin(2\pi - t))$ ist die gleiche Ellipse mit der umgekehrte Richtung.

Beispiel: Sei $f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Der Graph von f ist eine Kurve in $\mathbb{R}^2$. $\gamma(t) = (t, f(t))$ ist ihre Parametrisierung.

Definition: Seien $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $v\colon \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld und $\gamma \in \Omega$ eine C^1-Kurve mit Parametrisierung $\gamma : [a,b] \mapsto \Omega,\ t \mapsto \gamma(t)$. Das *Kurvenintegral (Wegintegral) von v entlang γ*, bezeichnet mit $\int_\gamma v.ds$, ist

$$\int_\gamma v.ds := \int_a^b v(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

Bemerkung: Wenn wir $v = (v_1, \dots v_n)$ und $\gamma = (\gamma_1(t), \dots \gamma_n(t)) = (x_1, \dots x_n)$ mittels der Koordinatenfunktionen schreiben, schreiben wir $\int_\gamma v \cdot ds = \int_\gamma v_1 dx_1 + \cdots v_n dx_n$.

Interpretation: Ist v ein Kraftfeld, so misst das Kurvenintegral die Arbeit, die nötig ist, um ein Teilchen längs γ durch das Feld zu bewegen.

Beispiel: Sei $v(x, y) = (-y, x)$ und $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Dann gilt:

$$\int_\gamma v.ds = \int_0^{2\pi} v(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t)\, dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t\, dt = 2\pi$$

Beispiel: Sei $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $\quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Dann gilt:

$$\int_\gamma -y\, dx + x\, dy + z^2\, dz = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t, t^2) \cdot (-\sin t, \cos t, 1)\, dt = \int_0^{2\pi} t^2 + 1\, dt = 2\pi + \frac{(2\pi)^3}{3}$$

Das Kurvenintegral hat die folgende Eigenschaften.

Theorem 2.1.1 *Sei $v\colon \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld und seien α, γ zwei Kurven in Ω. Dann gilt*

1. *Das Kurvenintegral ist invariant unter orientierungserhaltender Umparametrisierung,i.e. Sei $\vartheta\colon [c, d] \mapsto [a, b]$ eine C^1-fFunction mit $\vartheta(c) = a$, $\vartheta(d) = b$, and $\vartheta'(t) > 0$, $\forall t \in [c, d]$. Dann gilt*
$$\int_{\gamma\circ\vartheta} v.ds = \int_\gamma v.ds$$
2. $$\int_{\gamma+\alpha} v.ds = \int_\gamma v.ds + \int_\alpha v.ds$$
3. $$\int_{-\gamma} v.ds = -\int_\gamma v.ds$$

2.2 Potentiale und Konservative Vektorfelder

Definition: Sei $v\colon \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ ein Vektofeld. Ein differenzierbares Skalarfeld $f\colon \Omega \mapsto \mathbb{R}$, für welches $\nabla f = v$ heisst ein *Potential* von v.

Beispiel: Für $v(x, y) = (2xy^2, 2yx^2)$, ist $f(x, y) = x^2y^2$ ein Potential.

Bemerkung: Im Fall $n = 1$ ist ein Potential dasselbe wie eine Stammfunktion.

Bemerkung; Für $n = 1$, falls $g\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ stetig ist, dann hat g eine Stammfunktion. In Dimension $n \geqslant 2$ haben viele relevante Vektorfelder kein Potential.

Beispiel: $v(x, y) = (2xy^2, 2x)$ has no potential.

Der folgende Integralsatz für Kurvenintegrale ist eine vektorielle Variante des Haupsatzes der eindimensionalen Integralrechnung.

Theorem 2.2.1 *Für jedes C^1-Skalarfeld f auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und jeden Weg γ von $p = \gamma(a)$ nach $q = \gamma(b)$ in Ω, gilt*

$$\int_\gamma \nabla f \cdot ds \;=\; f(q) - f(p).$$

Theorem 2.2.2 *Fur jedes stetige Vektorfeld $v\colon \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ auf einer offenen Teilmenge Ω sind äquivalent:*

1. *Das Vektorfeld v besitzt ein Potential.*
2. *Das Integral von v über jeden Weg in Ω hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt ab.*
3. *Das Integral von v über jeden geschlossenen Weg in Ω ist Null.*

Definition: Ein Vektorfeld mit diesen äquivalente Eigenschaften heisst *konservativ*.

Der folgende Satz gibt eine notwendige Bedingung für ein Vektorfeld konservativ zu sein

Theorem 2.2.3 *Sei $v = (v_1, \dots, v_n)$ ein C^1- Vektorfeld auf einer offenen Menge $\Omega \in \mathbb{R}^n$. Falls v konservativ ist, dann gilt $\frac{\partial v_i}{\partial x^j} = \frac{\partial v_j}{\partial x^i}$, $\forall i, j,\ 1 \leqslant, i, j \leqslant n$.*

Bemerkung: Die Bedingung $\frac{\partial v_i}{\partial x^j} = \frac{\partial v_j}{\partial x^i}$ ist notwending aber nicht hinreichend!

Beispiel: Sei $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x, y) \neq (0, 0)\}$, Sei $v : \Omega \to \mathbb{R}^2$, $v(x, y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$. Dann gilt $\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x}$. Aber v ist nicht konservative, da $\int_\gamma v.ds = 2\pi \neq 0$ für die geschlossene Kurve $\gamma(t) = (\cos t, \sin t),\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Bemerkung: Konservativ zu sein ist nicht nur ein Eigenschaft vom Vektorfeld v sondern auch von der Menge Ω.

Beispiel: Sei $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0\}$. Seien $(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ mit $r > 0$, und $\varphi \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ die Polarkoordinaten. Sei $\vartheta = \arctan\frac{y}{x}$. Dann gilt $\nabla\varphi = v$, und somit ist v konservative auf X.

Für konvexe Menge haben wir,

Theorem 2.2.4 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex. Sei $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Vektorfeld mit $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$, $\quad \forall\ 1 \leqslant i, j \leqslant n$. Dann ist v konservative.*

3 Integration in $\mathbb{R}^n$

3.1 Definitionen und Eigenschaften

Definition: Ein n-dimensionaler Quader $Q \in \mathbb{R}^n$ ist ein Produkt $Q = \prod_{i=1}^n I_i = \{(x_1, ..., x_n) \,|\, x_i \in I_i, \forall i \in \{1, ..., n\}\}$ wobei $I_i = [a_i, b_i], i = 1, ..n$. Somit $Q = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$. Das *Volumen* von Q ist $\mathrm{Vol}(Q) = \prod_{i=1}^n |b_i - a_i| = \mu(Q)$.

Definition: Eine *Zerlegung (Partition)* $P = \{Q_j\}_{j=1}^l$ von Q ist eine Vereinigung von disjunkte Teilquader Q_j so dass $Q = \bigcup_{i=1}^{l} Q_i$.

Sei $\mathcal{P}(Q)$ die Menge aller Partitionen von Q.

Eine *Verfeinerung* der Zerlegung $P = \{Q_j\} \in \mathcal{P}(Q)$ ist eine Zerlegung $\widetilde{P} = \{\widetilde{Q}_k\}_{k=1}^m \in \mathcal{P}(Q)$ so dass jedes $\widetilde{Q}_k$ in einem Q_j enthalten ist .

Der *Durchmesser* von Q_j ist $diam(Q_j) := \sup_{x,y\in Q_j} |x - y|$.

Der *Norm* oder die *Feinheint* der Partition P ist $\delta_P := \max_{1\leqslant j\leqslant l} diam(Q_j)$

Definition: Seien $f : Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, $P = \{Q_j\}_{j=1}^l$ eine Zerlegung von Q, und $\xi_j \in Q_j$. Das *Riemann Summe* von f bezüglich der Zerlegung P und die Punkte $\{\xi_j\}$ ist

$$R_f(P) = \sum_{j=1}^{l} f(\xi_j)\mu(Q_j).$$

Definition: Sei $f : Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Das Untere- und resp. Obere Riemann Summe ist

$$U_f(P) = \sum_{j=1}^{l} \inf_{Q_j}(f)\mu(Q_j), \quad \text{resp.} \quad O_f(P) = \sum_{j=1}^{l} \sup_{Q_j}(f)\mu(Q_j).$$

Theorem 3.1.1 *Ist $\widetilde{P} \in \mathcal{P}(Q)$ eine Verfeinerung der Zerlegung P, so gelten $U_f(\widetilde{P}) \geqslant U_f(P)$, und $O_f(\widetilde{P}) \leqslant O_f(P)$.*
Ist $P_1, P_2 \in \mathcal{P}(Q)$, so gilt $U_f(P_1) \leqslant O_f(P_2)$.

Definition: Sei $f : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt. Das *Untere* (resp. *Obere) Riemann Integral* ist

$$\underline{\int_Q} f(x)d\mu = \underline{I}(f) := \sup\{U_f(P) \,|\, P \in \mathcal{P}(Q)\}, \ (\text{resp.}, \ \overline{\int_Q} f(x)d\mu = \overline{I}(f) := \inf\{O_f(P) \,|\, P \in \mathcal{P}(Q)\})$$

f heisst *integrierbar* falls $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$. Wenn f integrierbar ist, dann definieren wir das *Integral von f* als

$$I(f) := \underline{I}(f) = \overline{I}(f).$$

Das integral von f wird mit $\int f d\mu = I(f)$ bezeichnet.

Theorem 3.1.2 *Sei $f : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt. f ist integrierbar geanau dann wenn $\forall \varepsilon > 0\ \exists P \in \mathcal{P}(Q)$ so dass $0 \leqslant O_f(P) - U_f(P) < \varepsilon$.*

Beispiel: Seien $P = \{Q_j\}_{j=1}^l \in \mathcal{P}(Q)$, und $\chi_{Q_j}(x) = \begin{cases} 1 & if\, x \in Q_j \\ 0 & if\, x \notin Q_j \end{cases}$ die charakteristische Funktion Funktion von Q_j. Die Treppenfunktion, $f(x) = \sum_{j=1}^l c_j \chi_{Q_j}(x)$ ist integrierbar, da

$$\underline{I}(f) = \sum_{j=1}^{l} c_j Vol(Q_j) = \overline{I}(f).$$

Theorem 3.1.3 *Ist $f : Q \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f integrierbar.*

Theorem 3.1.4 *Seien $f, g : Q \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann für jede $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gelten*

1. *$(\alpha f + \beta g) : Q \to \mathbb{R}$ ist integrierbar und $\int_Q (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_Q f d\mu + \beta \int_Q g d\mu$*
2. *Falls $f(x) \leqslant g(x)\, \forall x \in Q$, dann gilt $\int_Q f d\mu \leqslant \int_Q g d\mu$*
3. *Falls $f(x) \geqslant 0\, \forall x \in Q$, dann gilt $\int_Q f d\mu \geqslant 0$*
4. *$\left| \int_Q f d\mu \right| \leqslant \int_Q |f| d\mu \leqslant (\sup_Q |f|)\mu(Q)$*
5. *Sei $P = \{Q_j\}_{j=1}^l \in \mathcal{P}(Q)$ so dass $Q = \bigcup_{j=1}^l Q_j$ und $Q_j \cap Q_i = \varnothing\, \forall i \neq j$. Dann gilt $\int_Q f d\mu = \sum_{j=1}^l \int_{Q_j} f d\mu$.*

Theorem 3.1.5 *(Fubini) Sei $Q = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ und sei $f : Q \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt*

$$\int_Q f d\mu = \int_{a_n}^{b_n} \Big(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \Big(... \int_{a_1}^{b_1} f dx_1 ... \Big) dx_{n-1} \Big) dx_n$$

Beispiel: Sei $f(x, y) = 2x + 2yx$. Dann gilt

$$\int_0^1 \int_{-2}^2 f dy dx = \int_{-2}^2 \int_0^1 f dx dy = \int_{-2}^2 \int_0^1 2x(y+1) dx dy = \int_{-2}^2 \Big[x^2(y+1) \Big]_{x=0}^1 dy = \int_{-2}^2 y+1 dy = 4$$

Theorem 3.1.6 *(Fubini) Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein normal Bereich bezüglich x, i.e $\exists\, g,\, h \colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ stetige Funktionen so dass $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon a \leqslant x \leqslant b, g(x) \leqslant y \leqslant h(x)\}$. Falls f stetig auf D ist, dann ist f integrierbar auf D und gilt*

$$\int_D f d\mu = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Falls $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon c \leqslant y \leqslant d, G(y) \leqslant x \leqslant H(y)\}$, dann gilt

$$\int_D f d\mu = \int_c^d \left(\int_{G(y)}^{H(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

Beispiel: Berechne das Integral von xy^2 über den Bereich $B \subset \mathbb{R}^2$,zwischen der Parabel $x = y^2$ und der Geraden $x = 4$. Je nachdem, ob wir zuerst nach x oder nach y integrieren, lautet die Rechnung

$$\begin{aligned} B &= \left\{ \tbinom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leqslant x \leqslant 4,\; -\sqrt{x} \leqslant y \leqslant \sqrt{x} \right\}, \\ \int_B xy^2 d\mu &= \int_0^4 \left(\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy^2 \, dy \right) dx = \int_0^4 \tfrac{2}{3} x^{5/2} \, dx = \tfrac{512}{21}, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} B &= \left\{ \tbinom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -2 \leqslant y \leqslant 2,\; y^2 \leqslant x \leqslant 4 \right\}, \\ \int_B xy^2 d\mu &= \int_{-2}^2 \left(\int_{y^2}^4 xy^2 \, dx \right) dy = \int_{-2}^2 \left(8y^2 - \tfrac{y^6}{2} \right) dy = \tfrac{512}{21}. \end{aligned}$$

Manchmal ist es besser, den Integrationsbereich aufzuteilen

Beispiel: Das Integral über den von der Geraden $x + y = 0$ und der Parabel $x^2 + y = 2$ eingeschlossenen Bereich ist

$$\int_{-1}^2 \int_{-x}^{2-x^2} f(x, y) \, dy \, dx = \int_{-2}^1 \int_{-y}^{\sqrt{2-y}} f(x, y) \, dx \, dy + \int_1^2 \int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Manchmal muss man die Reihenfolge vertauschen.

Beispiel:

$$\int_0^1 \int_x^1 e^{y^2} dy dx = \int_0^1 \int_0^y e^{y^2} dx dy = \int_0^1 y e^{y^2} dy = \frac{1}{2}(e - 1)$$

3.2 Anwendungen von zweidimensionale Integral

Fact: Sei D ein (normal) Bereich in $\mathbb{R}^2$. Dann ist $A(D) = \int_D 1dxdy$ die Fächeninhalt des Bereichs D.

Wenn $f(x,y) \geqslant 0$ für $(x,y) \in D$, dann ist $\int_D f(x,y)dxdy$ das Volumen unter dem Graph von f über den Bereich D.

Beispiel: Das Volumen von einer Pyramide mit Qudratischer Grundfäche mit Länge L und Höhe H ist

$$V = 4\int_0^{L/2}\int_{-x}^{x}(H - \frac{2H}{L}x)dydx = \frac{L^2H}{3}$$

Fact: Sei D ein Bereich in $\mathbb{R}^2$ mit einer Massenverteilung, welche durch eine integrierbare Funktion $f(x,y)$ gegeben ist. Dann ist die *Gesamtmasse* von D gleich $m(D) = \int_D f(x,y)dxdy$.

Der Massenschwerpunkt von D ist $(\overline{x}(D), \overline{y}(D))$ wobei

$$\overline{x}(D) = \frac{1}{m(D)}\int_D xf(x,y)dxdy, \;\; \overline{y}(D)) = \frac{1}{m(D)}\int_D yf(x,y)dxdy.$$

Wenn die Massendichte Konstant ist, heisst der Massenschwerpunkt *geometrische Schwerpunkt* oder *Centroid.*

Beispiel: Ein Kreis hat den geometrischen Schwerpunkt in seinem Mittelpunkt. e.g. für D_R, der Kreis mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius R, gilt $\overline{x}(D) = \frac{1}{A(D)}\int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{(1-x^2)}}^{\sqrt{(1-x^2)}} xdxdy = 0$.

Theorem 3.2.1 *(Pappus) Seien f, und g, zwei stetige Funktionen mit $0 \leqslant f \leqslant g$. Sei D, der von den Graphen $f(x)$ und $g(x)$ eingeschlossener Bereich, über dem Intervall $[a,b]$. Sei S der Rotationskörper, der durch Rotation der Fläche von D um die x-achse entsteht. Seien $V(S)$ das Volumen von S und $(\overline{x}(D), \overline{y}(D))$ der geometrische Schwerpunkt von D. Dann gilt*

$$V(S) = 2\pi\overline{y}(D)A(D).$$

Beispiel: Sei D ein Kreis mit Radius R in der (x,y)-Ebene, der oberhalb der x-Achse liegt. Sei b der Distanz vom Mittelpunkt von D bis zu x-Achse. Das Volumen vom Torus, der durch Rotation der Fläche von D um die x-achse entsteht, ist gleich $(2\pi)b(\pi R^2) = 2\pi^2R^2b$.

3.3 Substitution

Theorem 3.3.1 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offene beschränkte Menge. Sei $\varphi\colon U \mapsto \mathbb{R}^n$ ein injektive C^1-Funktion mit Jacobi Matrix $\nabla\varphi$ und mit $\det\nabla\varphi(u) \neq 0$, $\forall u \in U$. Seien $X := \varphi(U)$ und $f\colon X \mapsto \mathbb{R}$ ein stetige Skalarfeld. Dann gilt*

$$\int_{X=\varphi(U)} f(x)d\mu(x) = \int_U f(\varphi(u))\,|\det\nabla\varphi(u)|\,d\mu(u)$$

Bemerkung: Seien $n = 1$, und $U = [a,b]$. Da φ injective ist, $\varphi' \neq 0$. φ ist entweder monotone wachsend oder falllend. $X = [\varphi(a), \varphi(b)]$ falls φ monotone wachsend ist$(\varphi' > 0)$, und $X = [\varphi(b), \varphi(a)]$ falls φ monotone fallend $(\varphi' < 0)$ ist. Somit sind die Formelm imTheorem 3.3.1 und die Substitutionsformel von Integralen in $\mathbb{R}$, äquivalent.

Beispiel: Sei φ affin Linear Abbildung $u \mapsto b + Au$ für ein Vektor b und ein invertierbare $n \times n$-matrix A. Dann gilt

$$\int_{X=\varphi(U)} f(x)d\mu(x) \;=\; \int_U f(b+Au)\cdot|\det A\,|d\mu(u).$$

Beispiel: Berechne das Integral $\int_D e^{\frac{y-x}{y+x}} dxdy$ über den Bereich D, der von den Geraden $x = 0$, $y = 0$, und $x + y = 2$ eingeschlossen ist. Seien $u = y - x$ und $v = y + x$ so dass

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \varphi(u, v) = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Dann gilt $D = \varphi(E)$, wobei E der Bereich, der von den Geraden $v = 2$, $u = v$ und $u = -v$ eingeschlossene Dreieck ist. Somit gilt

$$\int_{D=\varphi(E)} e^{\frac{y-x}{y+x}} dxdy = \int_E e^{u/v} \frac{1}{2} dudv = \frac{1}{2} \int_0^2 \int_{-v}^{v} e^{u/v} \, dudv = e - 1/e$$

Beispiel: Die Abbildung der Polarkoordinaten erfüllt die Voraussetzungen des Satzes.

$$g \colon [0, \infty[\times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \ \left(\begin{smallmatrix} r \\ \varphi \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{smallmatrix}\right)$$

Wegen $\det \nabla g(r, \varphi) = r$, gilt

$$\int_{X=\varphi(U)} f(x, y) dxdy \;=\; \int_U f(g(r, \varphi)) r dr d\varphi$$

Beispiel: Berechne das Volumen zwischen den Graphen von zwei Funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2$ und $g(x, y) = 50 - x^2 - y^2$.Wir finden zuerst die Schnittmenge der zwei Graphen. Die ist der Kreis $x^2+y^2 = 25$. Das Volumen ist dann gleich $\iint_D g(x, y) - f(x, y) \, dxdy$ wo $D := \{(x, y) \colon x^2+y^2 \leqslant 25\}$. Somit

$$\text{vol} = \iint_D (g(x, y) - f(x, y)) dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^5 (50 - 2r^2) \, r dr d\varphi = 625\pi$$

Beispiel: Die Abbildung der Kugelkoordinaten,

$g \colon [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2] \mapsto \mathbb{R}^3$, $(r, \vartheta, \varphi) \mapsto (r \cos \vartheta \cos \varphi, r \sin \vartheta \cos \varphi, r \sin \varphi)$ ist differenzierbar mit $\det(\nabla(g)) = r^2 \cos \varphi$.

$$\int_{X=g(U)} f(x, y, z) \, dxdydz = \int_U f(g(r, \vartheta, \varphi)) r^2 \cos \varphi \, dr d\vartheta d\varphi$$

Beispiel: Das Volumen der Kugel S mit Radius R ist gleich

$$\int_S 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos \varphi \, d\varphi \, d\vartheta \, dr = \frac{4\pi}{3} R^3.$$

3.4 Improper Integrals

Sei$X$ ein offene nicht kompakte Teilmenge in $\mathbb{R}^n$. Sei f eine Funktion auf X so dass für jede kompakte Teilmenge $K \subset X$, das Integral $\int_K f d\mu$ existiert.

Definition: Wir sagen dass $\int_K f d\mu$ *für wachsendes K den Grenzwert I hat,* wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine Kompakte Teilmenge $K_0 \subset X$ existiert, sodass für alle Kompakte Teilmenge $K \subset X$, welche K_0 enthalten, gilt:

$$\left| \int_K f d\mu \;-\; I \right| \;<\; \varepsilon.$$

In diesem Fall heisst I das *uneigentliche Integral von f über X* and wird bezeichnet mit

$$\int_X f d\mu \;=\; \int_X f(x) d\mu(x).$$

Theorem 3.4.1 *Ist f stetig, so existiert das uneigentliche Integral $\int_X f d\mu$ genau dann, wenn die Werte $\int_K |f| d\mu$ für alle Kompakte K nach oben beschränkt sind.*

Bemerkung: Wie üblich schreiben wir auch $\int_X f d\mu = \infty$ oder $= -\infty$, wenn $\int_K f d\mu$ den uneigentlichen Grenzwert $\pm\infty$ hat.

Fakt: Gilt überall $f \geqslant 0$ oder überall $f \leqslant 0$, so existiert $\int_X f d\mu$ exists oder es ist gleich $\pm\infty$.Ausserdem gelten dann alle bisherigen Regeln, insbesondere der Satz von Fubini und die Substitutionsregel, auch für das uneigentliche Integral.

Beispiel: Aus dem Satz Fubini folgt

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy \;=\; \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\, dy\, dx \;=\; \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx\right)^2.$$

Wenn wir dagegen zuerst mit Polarkoordinaten substituieren, folgt

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy \;=\; \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r\, dr\, d\varphi \;=\; \int_0^{\infty} e^{-r^2} 2\pi r\, dr \;=\; -\pi e^{-r^2}\Big|_0^{\infty} \;=\; \pi.$$

Somit

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \;=\; \sqrt{\pi}.$$

4 Integral Satz von Green

4.1 Formulierung und Interpretation

Der Satz von Green übersetzt das zweidimensionale skalare Integral über einen Bereich Ω in ein eindimensionales Kurvenintegral entlang des Randes $\partial\Omega = \gamma$

Definition: Eine Kurve mit Parametriesierung $\gamma\colon [a,b] \mapsto \mathbb{R}^2$ heisst eine *Jordan Kurve* wenn sie geschlossen, i.e. $\gamma(a) = \gamma(b)$, stückweise C^1, und injektiv auf einem Intervall (a,b) ist.

Definition: Ein Gebiet R heisst *einfach zusammenhängend* , falls es zusammenhängend ist und man jede einfach geschlossene Kurve in R auf einen Punkt zusammenziehen kann.

Theorem 4.1.1 *(Green's theorem) Sei $v(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ ein C^1-Vektorfeld auf einem offenen, einfach-zusammenhängenden Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Sei γ eine positiv orientierte Jordan Kurve (d.h im Gegenuhrzeigersinn) und sei R das von γ begrenzte Gebiet vereinigt mit γ. Dann gilt*

$$\iint\limits_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_\gamma P dx + Q dy$$

Definition: Sei $v(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ ein Vektorfeld. Das Skalerfeld $\mathrm{rot} v := \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ heisst *curl* oder die *Rotation* von v oder *Zirkulationrate* von f.

Interpretation: Wenn v das Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeitsteilchen darstellt, misst das Kurven Integral die Zirkulation der Flüssigkeiten entlang der Kurve γ. Nach dem Satz von Green kann man folglich $\mathrm{rot} v$ als lokale Zirkulationsrate von v interpretieren, deren Integral über R die Gesamtzirkulation ergibt. d.h. Die Summe über R von der lokalen Rotation ist gleich der Zirkulation von v entlang γ.

Wegen dieser Beudeutung heisst der Satz in Theorem 4.1.1 , *Zirkulation-curl Version* oder *Tangential Version* der Satzes von Green.

Beispiel: Sei $v(x,y) = (y+3x, y-2x)$ ein Vektorfeld und γ die geschlossene Kurve, die am Rand der Ellipse $E: 4x^2+y^2=4$ im Gegenuhrzeigersinn läuft. Dann gilt

$$\oint_\gamma (y+3x)dx + (y-2x)dy = \iint_E (\mathrm{rot} v) d\mu = \iint_E (-2-1)dxdy = 3\mathrm{Area}(E) = -6\pi$$

4.2 Berechnung der Flächeninhalt mittels Satz von Green

Theorem 4.2.1 *Sei Ω, der Bereich, der von der Kurve γ eingeschlossen ist. Für jedes der Vektorfelder $v(x,y) = (0,x)$ oder $(-y,0)$ oder $(-y/2, x/2)$, gilt rot $v = 1$ und somit*

$$Area(\Omega) = \iint_\Omega dxdy = \oint_\gamma x\,dy = \oint_\gamma -y\,dx = \frac{1}{2}\oint_\gamma x\,dy - y\,dx$$

Beispiel: Sei $\gamma(t) = (t^2, t^3/3 - t), \quad -\sqrt{3} \leqslant t \leqslant \sqrt{3}$. Der Flächeninhalt des von γ eingeschlossenen Gebiets ist gleich

$$\oint_\gamma x\,dy = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} t^2(t^2-1)dt = \frac{8\sqrt{3}}{5}$$

4.3 Fluss-Divergenz Version des Satzes von Green -Gauss' Satz in $\mathbb{R}^2$

Defintion: Sei $v(x,y) = (P(x,,y), Q(x,y)$ ein Vektorfeld. Das Skalarfeld $\mathrm{div}(v) := \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ heisst *Divergenz* or *Flussrate* von v.

Theorem 4.1.1, ist äquivalent zu der folgende Version des Satzes von Green. Dieser Version heisst auch *Divergenze Satz* oder *Satz von Gauss* in $\mathbb{R}^2$.

Theorem 4.3.1 *(Normal form of Green's theorem)Seien $v(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, γ und R wie in Theorem 4.1.1. Dann gilt*

$$\iint_R \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy = \iint_R div(v)dxdy = \oint_\gamma Pdy - Qdx$$

Interpretation: Sei $v = (P,Q)$ Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeitsteilchen. Sei γ eine einfache geschlossene Kurve und sei R der Bereich, der die Kurve γ begrenzt. Wir fragen uns, wieviel Flüssigkeit in diesen Bereich raus (oder rein) geht. Sei n der Normalvektor an der Kurve und $v \cdot n$ die Komponente von v in der Richtung n. Das Kurvenintegral von $v \cdot n$ entlang der Kurve γ heisst *Fluss* des Vektorfelds v entlang γ und ist gleich $\oint_\gamma Pdy - Qdx$. Nach dem Satz von Green kann man folglich div$v$ als lokale Flussrate von v interpretieren, deren Integral über R den Gesamtfluss ergibt. d.h. Die Summe über R von der lokalen Fluss (Divergenze) ist gleich der Fluss von v entlang γ.