Analysis I: Vorgelöste Aufgaben Ableitungen

Aufgabe 1 (Ableitungen berechnen)

a) Berechne die Ableitung der Funktion $f(x) = \sqrt[5]{2+\cos x}$;

$$(\sqrt[5]{2+\cos x})' = ((2+\cos x)^{\frac{1}{5}})' = \frac{1}{5}(2+\cos x)^{-\frac{4}{5}}(2+\cos x)' = -\frac{1}{5}(2+\cos x)^{-\frac{4}{5}}\sin x$$

b) Berechne die n-te Ableitung der Funktion $f(x) = \arctan x$ in $x = 0$ für $n = 1, 2, 3, \dots$.

Es ist $\tan' x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$. Wir berechnen also mit der Regel für die Umkehrfunktion, und der Formel für die geometrische Reihe (für $|x| < 1$):

$$f'(x) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}.$$

Daraus erhalten wir, mit der Regel für die Differentiation einer Potenzreihe (und $n \geq 1$):

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}x^{2k}$$

Es ist nun

$$\frac{d^{n-1}x^{2k}}{dx^{n-1}}(0) = \begin{cases} (n-1)! & \text{falls } n = 2k+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Also erhalten wir

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)! & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 2: Kurvendiskussion

Bestimmen Sie das Minimum und das Maximum der Funktion $f(x) = \arctan(x^3 - 3x + 1)$ auf dem Intervall $[-2, 2]$. Bestimmen auch maximale Intervalle auf denen die Funktion monoton ist und ggf. lokale Extremalstellen.

Wir kürzen ab: $p(x) := x^3 - 3x + 1$. Berechne die Ableitung:

$$p'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$$

(Hinweis: Hier kann man die Nullstellen direkt ablesen. Falls man es nicht sieht, oder in schwierigeren Fällen, muss man ggf. die Formel für die Nullstellen eines quadratischen Polynoms anwenden.)

Wir berechnen nun die Ableitung von f:

$$f'(x) = \frac{1}{1+p(x)^2}p'(x) = \frac{1}{1+p(x)^2}3(x-1)(x+1)$$

Da der Bruch vorne immer positiv ist sind die Nullstellen von f' gerade $x = \pm 1$, die beide im betrachteten Intervall $[-2, 2]$ liegen. Ausserdem kann man ablesen:

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{für } x \in (-2,-1) \cup (1,2) \\ f'(x) < 0 & \text{für } x \in (-1,1) \end{cases}$$

Daraus folgt zum einen, dass f auf $[-2,-1]$ und $[1,2]$ jeweils streng monoton steigend ist und streng monoton fallend auf $[-1,1]$. Daraus folgt weiterhin, dass f ein lokales Maximum in $x=-1$ und ein lokales Minimum in $x=1$ hat, und ausserdem ein lokales Minimum am Rand $x=-2$, und ein lokales Maximum in $x=2$.

Um die globalen Extrema zu bestimmen vergleichen wir die Funktionswerte: $p(-2)=-1$, $p(-1)=3$, $p(1)=-1$, $p(2)=3$. Da arctan eine streng monoton steigende Funktion ist, ist also das globale Maximum von f gerade $f(-1)=f(2)=\arctan 3$ und das globale Minimum $f(-2)=f(1)=\arctan(-1)=-\frac{\pi}{4}$.

(Hinweis: Hier haben wir als Kandidaten für die Extrema die Nullstellen der Ableitung von f und die Randpunkte betrachtet. Wäre die Funktion im Inneren des Intervalls nicht überall differenzierbar hätten wir zusätzlich noch die Stellen an denen f' nicht existiert als potentielle Extremalstellen betrachten müssen.)