Analysis I: Vorgelöste Aufgaben zu Ableitungen

Aufgabe 1 (Taylorreihe berechnen)
Zur Berechnung der Taylorreihe gibt es im Wesentlichen zwei Methoden: (i) Man berechnet direkt die höheren Ableitungen der gegebenen Funktion oder (ii) man führt die Funktion zurück auf eine, deren Taylorreihe man kennt. (D.h. für uns konkret auf die Binomial- bzw. geometrische Reihe oder die Reihenentwicklungen von exp, log, sin, cos etc.) Oft sind beide Methoden anwendbar. Hier geben wir je ein Beispiel:

a) Berechne die Taylorreihe der Funktion $f(x) = \sqrt[4]{16 + x^2}$ in $x = 0$.

Wir benutzen die Binomialreihe:

$$\sqrt[4]{16 + x^2} = 2\sqrt[4]{1 + \frac{x^2}{16}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{4}}{k} \left(\frac{x^2}{16}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{4}}{k} \left(\frac{x}{4}\right)^{2k} = Tf(x, 0)$$

Die Binomialreihe hat (hier) Konvergenzradius 1, die Reihe oben hat also Konvergenzradius 4.

b) Berechne die Taylorreihe von $f(x) = \cos x$ in $x = \frac{\pi}{4}$.

Wir berechnen direkt die Ableitungen

$$\cos^{(2n)} x = (-1)^n \cos x \qquad \cos^{(2n+1)} x = -(-1)^n \sin x.$$

An der Stelle $x = \frac{\pi}{4}$ erhalten wir (mit $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$)

$$\cos^{(2n)} \frac{\pi}{4} = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos^{(2n+1)} \frac{\pi}{4} = -(-1)^n \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Die Taylorreihe ist also

$$Tf(x, \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor (k+1)/2 \rfloor}}{k!} (x - \frac{\pi}{4})^k.$$

Alternativ kann man auch die bekannten Taylorreihen von sin und cos ausnutzen und die Additionsformel (mit $y = x - \frac{\pi}{4}$)

$$\cos(x) = \cos(\frac{\pi}{4} + y) = \cos(y)\cos(\frac{\pi}{4}) - \sin(y)\sin(\frac{\pi}{4}).$$

So sieht man auch direkt, dass der Konvergenzradius der Taylorreihe ∞ ist.