Analysis I: Vorgelöste Aufgaben zu Integralen

Aufgabe 1 (Integrale berechnen)

Es gibt leider zum berechnen von Intgeralen kein Schema, das immer zum Erfolg führt. Es ist daher wichtig, viele Beispielaufgaben selbst(!) zu rechnen, um sich verschiedene Rechentricks anzueignen und "Muster" zu erkennen. In der Regel sind Integrale in der Prüfung zu lösen durch (möglicherweise mehrfache) Anwendung von Substitution, partieller Integration und Partialbruchzerlegung, und durch Standardintegrale.

Wichtig ist auch zu beachten, dass die folgenden Beispielaufgaben nicht alle für die Prüfung benötigten Tricks und Fälle abdecken können. Ausserdem führen zum Teil mehrere Methoden zum Ziel.

a) $\int (\log x)^2 dx$

Wir wenden zweimal partielle Integration an (mit $f(x) = 1$, $g(x) = (\log x)^2$, bzw. $f(x) = 1$, $g(x) = \log x$).

$$\begin{aligned}\int (\log x)^2 dx &= x(\log x)^2 - 2\int x\frac{1}{x}\log x dx = x(\log x)^2 - 2\int \log x dx \\ &= x(\log x)^2 - 2\left(x\log x - \int x\frac{1}{x}dx\right) + C \\ &= x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x + C.\end{aligned}$$

b) $\int x^2 \operatorname{artanh} x dx$

Die Funktion $\operatorname{artanh} = \tanh^{-1}$ ist definiert auf dem Intervall $(-1, 1)$, wir nehmen also an, dass wir die Stammfunktion auf diesem Intervall finden sollen.

Erinnerung oder Vorrechnung: Es ist $\operatorname{artanh}' x = 1 - \tanh^2 x$. Also ist $\operatorname{artanh}' x = \frac{1}{1-x^2}$. Wir berechnen dann mit partieller Integration:

$$\int x^2 \operatorname{artanh} x dx = \frac{1}{3}x^3 \operatorname{artanh} x - \frac{1}{3}\int x^3 \frac{1}{1-x^2}dx$$

Das Integral rechts löst man mit Partialbruchzerlegung. Man kann sich die hier die Arbeit vereinfachen, indem man zunächst $u = x^2$ substituiert.

$$\int x^3\frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{u}{1-u}du = \frac{1}{2}\int (\frac{1}{1-u} - 1)du = \frac{1}{2}(-\log(1-u) - u) + C = \frac{1}{2}(-\log(1-x^2) - x^2) + C$$

Wir erhalten zusammen:

$$\int x^2 \operatorname{artanh} x dx = \frac{1}{3}x^3 \operatorname{artanh} x + \frac{1}{6}(\log(1-x^2) + x^2) + C$$

Sofern man in der Prüfung Zeit hat ist es immer ratsam solche Rechnungen auf Ihre Richtigkeit zu überprüfen, indem man die Ableitung des Resultats berechnet:

$$\begin{aligned}(\frac{1}{3}x^3 \operatorname{artanh} x + \frac{1}{6}(\log(1-x^2) + x^2))' &= x^2 \operatorname{artanh} x + \frac{x^3}{3(1-x^2)} + \frac{1}{6}(\frac{-2x}{1-x^2} + 2x) \\ &= x^2 \operatorname{artanh} x \frac{2x^3 - 2x + 2x(1-x^2)}{6(1-x^2)} \\ &= x^2 \operatorname{artanh} x\end{aligned}$$