Analysis I: Vorgelöste Aufgaben zu Differentialgleichungen

Die typische Prüfungsaufgabe über Differentialgleichungen hat die folgende Form: "Berechne die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (DGL)." oder "Berechne die Lösung des Anfangswertproblems (DGL) mit Anfangswerten $f(t_0) = ..., f'(t_0) = ...$ etc." Differentialgleichungen (DGL) die wir (bis jetzt) lösen können haben dabei eine der folgenden Formen:

1. Eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.

$$P(D)f(x) = q(x)$$

   mit einem Polynom P und der Inhomogenität q. In diesem Fall rechnet man zunächst die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $P(D)f = 0$ aus (s. Königsberger 10.2, Satz 2). Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung errechnet sich dann durch addieren einer partikulären Lösung zur allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung. Ggf. erhält man die Lösung des Anfangswertproblems dadurch, dass man die freien Parameter in der allgemeinen Lösung so wählt, dass die Anfangsbedingungen erfüllt sind. Die Methode zum Errechnen der partikulären Lösung hängt von der Form von $q(x)$ ab:

   (a) Ist $q(x)$ eine Linearkombination von Ausdrücken der Form $t^m e^{ct}$ (das beinhaltet auch cos und sin, da $\cos(x) = (e^{ix} - e^{-ix})/2$ etc.), so kann man zur Bestimmung der partikulären Lösung (Königsberger 10.3, Satz 3 ff.) verwenden.

   (b) Für allgemeinere q kann man die Methode der Variation der Konstanten verwenden (Königsberger 10.5, Satz 4). Da die resultierenden Integrale schnell zu kompliziert für uns werden, beschränkt sich diese Methoden für uns auf relativ einfache Differentialgleichungen.

2. Ist die Differentialgleichung linear, aber mit nicht konstanten Koeffizienten, so ist sie manchmal durch eine Substitution auf den Fall konstanter Koeffizienten zurückführbar. Typische Substitution: $t = e^x$. Dann wird in der allgemeinen Lösung $x^k e^{ax}$ zu $\log^k(t)t^a$. (Man könnte dann z.B. auch letzteres als Ansatz nehmen.)

3. Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung mit (möglicherweise) nicht konstanten Koeffizienten kann man lösen wie in Serie 13 VIII (oder Königsberger 13.1) hergeleitet.

4. Für nichtlineare Differentialgleichungen kennen wir nur die Methode der Separation der Variablen für Differentialgleichungen erster Ordnung, die verlangt, dass die Differentialgleichung formal umgeschrieben werden kann in die Form

$$\frac{df}{dx} = \frac{P(x)}{Q(f)},$$

   und dann berechnet man die Lösung aus

$$\int Q(f)df = \int P(x)dx.$$

Aufgabe 1

a) Berechne die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y''' - 3y'' + 3y' - y &= \sinh x \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0 \\ y''(0) &= 1. \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung ist linear mit konstanten Koeffizienten (Fall 1 oben). Die Inhomogenität $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ hat klarerweise die Form von Fall 1a).

Wir berechnen die allgemeine homogene Lösung und dazu die Nullstellen von

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3.$$

Also ist 1 eine dreifache Nullstelle. Die allgemeine Lösung des homogenen Problems ist also

$$y_h = a_1 e^x + a_2 x e^x + a_3 x^2 e^x$$

mit unbestimmten Konstanten a_1, a_2, a_3.

Für die partikuläre Lösung verwenden wir Königsberger 10.3, Satz 3. Wir betrachten dazu separat die inhomogenen Terme $\frac{1}{2}e^x$ und $-\frac{1}{2}e^{-x}$ (Superpositionsprinzip). Für letzteren ist der Lösungsansatz nach dem Satz (da -1 keine Nullstelle von P ist)

$$y_{p,-} = c_0 e^{-x},$$

und einsetzen ergibt

$$P(D)y_{p,-} = c_0 e^{-x} P(-1) = -8c_0 e^{-x} \stackrel{!}{=} -\frac{1}{2}e^{-x}.$$

Also müssen wir $c_0 = \frac{1}{16}$ wählen. Für den Term $\frac{1}{2}e^x$ muss man beachten, dass 1 eine 3-fache Nullstelle von P ist, daher ist der Ansatz nach dem Satz 3

$$y_{p,+} = d_0 x^3 e^x.$$

Einsetzen ergibt

$$P(D)y_{p,+} = d_0 e^x P^3(1) = 6d_0 e^x \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}e^x.$$

Also müssen wir $d_0 = \frac{1}{12}$ wählen. Unsere partikuläre Lösung ist also

$$y_p = y_{p,+} + y_{p,-} = \frac{1}{12}x^3 e^x + \frac{1}{16}e^{-x}.$$

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems ist dann

$$y = y_p + y_h = y_p + a_1 e^x + a_2 x e^x + a_3 x^2 e^x.$$

Wir müssen nun noch a_1, a_2, a_3 so bestimmen, dass die Anfangsbedingungen in der Aufgabe erfüllt sind, d.h.:

$$\begin{aligned}
0 &= y(0) = y_0(0) + a_1 = \frac{1}{16} + a_1 \\
0 &= y'(0) = y_p'(0) + a_1 + a_2 = -\frac{1}{16} + a_1 + a_2 \\
1 &= y''(0) = y_p''(0) + a_1 + 2a_2 + 2a_3 = \frac{1}{16} + a_1 + 2a_2 + 2a_3.
\end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{1}{16} \\
a_2 &= -a_1 + \frac{1}{16} = \frac{1}{8} \\
a_3 &= \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{16} - a_1 - 2a_2) = \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

Die Lösung lautet also

$$y(x) = \frac{1}{12}x^3 e^x + \frac{1}{16}e^{-x} - \frac{1}{16}e^x + \frac{1}{8}x e^x + \frac{3}{8}x^2 e^x.$$

b) Löse das Anfangswertproblem $x^2 f'' + xf' = x^2$, $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$.

Die Differentialgleichung ist linear mit nicht konstanten Koeffizienten und inhomogen. Hier ist f insbesondere für positive x gefragt, wir können also substituieren $x = e^t$. Setzt man noch $g(t) := f(e^t)$, so gilt

$$
\begin{aligned}
g'(t) &= f'(e^t)e^t = xf'(x) \\
g''(t) &= f''(e^t)e^{2t} + f'(e^t)e^t = x^2 f''(x) + xf'(x).
\end{aligned}
$$

Unsere Differentialgleichung wird also zu

$$
\begin{aligned}
g''(t) &= e^{2t} \\
g(0) &= 1 \\
g'(0) &= 0.
\end{aligned}
$$

Die allgemeine homogene Lösung ist

$$g_h(t) = a_1 + a_2 t.$$

Wiederum wie oben findet man die partikuläre Lösung (Ansatz $g(t) = ce^{2t}$)

$$g_p(t) = \frac{1}{4}e^{2t}.$$

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems ist also

$$g(t) = \frac{1}{4}e^{2t} + a_1 + a_2 t.$$

Einsetzen in die Randbedingungen:

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{4} + a_1 \\
0 &= \frac{1}{2} + a_2,
\end{aligned}
$$

das heisst $a_1 = \frac{3}{4}$. $a_2 = -\frac{1}{2}$. Die Lösung für $g(t)$ lautet also

$$g(t) = \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}t.$$

Oder für $f(x) = g(\log x)$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\log x.$$

c) Löse das Anfangswertproblem $y' = e^y \sin x$, $y(0) = 0$.

Die Differentialgleichung ist nichtlinear. Wir können sie aber mittels Separation der Variablen lösen. Wir schreiben formal (!)

$$\frac{dy}{dx} = e^y \sin x \Leftrightarrow e^{-y}dy = \sin(x)dx.$$

Wir integrieren die Gleichung rechts und erhalten

$$\int e^{-y}dy = \int \sin(x)dx,$$

also

$$-e^{-y} = -\cos x + C. \tag{1}$$

Da $y(0) = 0$ sein soll erhalten wir

$$-1 = -1 + C$$

also $C = 0$. Auflösen von (1) nach y ergibt dann die Lösung

$$y(x) = -\log(\cos x).$$