Aufgabe I.

(a)
1. Bedeutet : „Für alle $x \in \mathbb{N}$ existiert $y \in \mathbb{N}$ so dass $y > x$“. Wahr, da $y = x + 1 \in \mathbb{N}$ für alle $x \in \mathbb{N}$ und $y = x + 1 > x$.
2. Bedeutet $\mathbb{R} \neq \mathbb{Q}$. Wahr (Beispiel : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).
3. Bedeutet : „Für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$ gilt : falls c ein Teiler von ab ist, c ein Teiler von a oder ein Teiler von b“. Falsch, (aber mit c Primzahl, ist das ein Lemma von Euklid). (Beispiel $c = 4$, $a = b = 2$).

(b)
1. $\forall n \in \mathbb{Z},\ n^2 \neq 24$.
2. $G \equiv$ FCB oder $\forall x \in F, G(x) =$ FCB.
3. Sei $\mathscr{P}$ die Menge der Primzahlen. $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathscr{P} : p > n$.

Aufgabe II.

(a) Sei

$$A = \mathbb{R} \cap \left\{ x : \frac{1}{1-x} < 1 - \frac{x}{2} \right\}.$$

Wir betrachten drei Fälle.

Fall 1: $x = 1$. Die linke Seite ist nicht definiert.

Fall 2: $x < 1$. Wenn $1 - x > 0$, ist die Ungleichung

$$\frac{1}{1-x} < 1 - \frac{x}{2}$$

äquivalent zu

$$1 < (1-x)\left(1 - \frac{x}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2}(x^2 - 3x) \Leftrightarrow x(x-3) > 0 \Leftrightarrow (x > 3 \vee x < 0) \tag{1}$$

Die Ungleichung (1) gilt, wenn beide Faktoren das selbe Vorzeichen haben. Das ist der Fall für alle $x > 3$ oder $x < 0$. In in diesem Fall ist aber $x < 1$. Also

$$A \cap]-\infty, 1[=]-\infty, 0[. \tag{2}$$

Fall 3: $x > 1$. Wenn $1 - x < 0$, verändert sich die Ungleichungszeichen und

$$\frac{1}{1-x} < 1 - \frac{x}{2} \Leftrightarrow 1 > (1-x)\left(1 - \frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow (0 < x < 3)\,.$$

Daher

$$A \cap]1, \infty[=]1, 3[. \tag{3}$$

Aus (2) und (3), folgt

$$A =]-\infty, 0[\cup]1, 3[.$$

(b) Sei $z \in \mathbb{C}$. Sei

$$B = \mathbb{C} \cap \{z : |z-1| + |z+1| = 8\}\,.$$

Die Gleichung

$$|z-1| + |z+1| = 8 \tag{4}$$

gilt genau dann, wenn

$$|z-1|^2 + 2|z^2 - 1| + |z+1|^2 = 64 \tag{5}$$

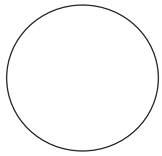

Abbildung 1: Grafische Darstellung von B.

aber

$$|z-1|^2 = |z|^2 - 2\mathrm{Re}\,(z) + 1, \quad |z+1|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}\,(z) + 1$$

und (4) ist äquivalent zu

$$2|z^2-1| = 62 - 2|z|^2.$$

Dass heisst

$$|z^2-1| = 31 - |z|^2,$$

oder

$$|z|^4 - 2\mathrm{Re}\,(z^2) + 1 = |z^2-1|^2 = 2\cdot 31^2 - 2\cdot 31|z|^2 + |z|^4.$$

Also ist (4) äquivalent zu

$$2\left(31|z|^2 - \mathrm{Re}\,(z^2)\right) = 31^2 - 1. \tag{6}$$

Sei $x, y \in \mathbb{R}$ so dass $z = x + iy$, dann

$$\mathrm{Re}\,(z^2) = \mathrm{Re}\,\left((x^2-y^2) + 2i\,xy\right) = x^2 - y^2$$

und aus (6), gilt (4) genau dann, wenn

$$60x^2 + 64y^2 = 31^2 - 1 = 30\cdot 32$$

oder

$$\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{15}y^2 = 1. \tag{7}$$

Also ist B die Ellipse mit Kartesische Koordinaten (7) (die Hauptachse ist 4, und die Nebenachse $\sqrt{15} = 3.87\ldots$) :

$$B = \mathbb{R}^2 \cap \left\{(x,y) : \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{15}y^2 = 1\right\}.$$

(c) $E = \mathbb{R}^3 \cap \{(x,y,z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z = 1\}$ ist die Dreieck (ABC) von der regelmäßige Tetraeder der Seite 1.

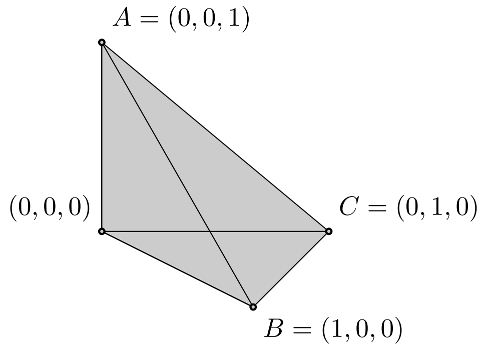

Abbildung 2: Grafische Darstellung von E.

Aufgabe III.

(a) Für alle $n \geq 1$ definieren

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Die Behauptung ist klar erfüllt für $n = 1$

$$f(1) = 1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$$

und der Induktionsschritt lautet

$$\begin{aligned} f(n+1) = f(n) + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)}{6}\left(n(2n+1) + 6(n+1)\right) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \quad \text{(benützen wir } 2n^2 + 7n + 6 = (2n+3)(n+2)\text{).} \end{aligned}$$

(b) Für alle $n \geq 1$, sei

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Die Behauptung ist trivial, weil

$$1^3 = 1 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$$

und der Induktionsschritt lautet

$$f(n+1) = f(n) + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2}{4}\left(n^2 + 4(n+1)\right) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$, sei

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot k!.$$

Also

$$f(0) = \sum_{k=1}^{0} k \cdot k! = 0 = 1! - 1 \qquad \left(\text{Konvention } \sum_{\varnothing} \cdots = 0\right)$$

und der Induktionnsschritt lautet

$$\begin{aligned} f(n+1) &= f(n) + (n+1) \cdot (n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)! = ((n+1)+1) \cdot (n+1)! - 1 \\ &= (n+2)! - 1. \end{aligned}$$

Aufgabe IV.

Aus $P(1)$ folgt nicht $P(2)$, sondern nur, dass jedes Pferd die gleiche Farbe wie es selbst hat. Für $k \geq 2$ ist der Induktionsschritt von $P(k)$ nach $P(k+1)$ allerdings korrekt.

Aufgabe V.

Wenn wir die Implikation

$$\text{„Karte hat schraffierte Rückseite} \quad \Rightarrow \quad \text{Karte ist ein Ass“} \tag{8}$$

überprüfern wollen, müssen wir zunächst alle Karten mit schraffierter Rückseite überprüfen. Also müssen wir sicher die zweite Karte von links umdrehen. Nun müssen wir natürlich noch prüfen, ob keine andere Karte auch eine schraffierte Rückseite hat. Denn die äquivalente Aussage von (8) ist

$$\text{„Karte ist kein Ass} \quad \Rightarrow \quad \text{Karte hat nicht schraffierte Rückseite“.} \tag{9}$$

Da es keine Rolle spielt, welche Rückseiten die Karten Eins und Drei haben, müssen wir diese nicht umdrehen. Jedoch müssen wir verifizieren, dass die letzte Karte, welche kein Ass ist, nicht eine schraffierte Rückseite hat. Also drehen wir sie um. Da es für unsere Aussage keine Rolle spielt, welche Vorderseite die Karte mit der gepunkteten Rückseite hat, müssen wir sie nicht umdrehen. Also haben wir zwei der Karten umgedreht.

Aufgabe VI.

(a) Wir definieren über $\mathbb{R}$ die Addition $+$, seine Inverse $-$ und $0_{\mathbb{R}}$ für alle $A, B \in \mathbb{R}$ als

$$\begin{cases} A + B = \mathbb{Q} \cap \{p : \exists a \in A, \exists b \in B : p = a + b\} \\ \quad -A = \mathbb{Q} \cap \{p : \exists \varepsilon > 0, \forall a \in A : (p + a) < -\varepsilon\} \\ A - B = A + (-B) \\ \quad 0_{\mathbb{R}} = \mathbb{Q} \cap \{p : p < 0\}. \end{cases}$$

Dass $A + B \neq \varnothing, A + B \neq \mathbb{Q}$ klar ist. Sollte $A + B$ ein grösstes Element $m \in \mathbb{Q}$ haben, so würde $(a, b) \in A \times B$ mit

$$m = a + b$$

existieren, aber A hat kein grösstes Element. Folglich existiert $a' \in A$ mit $a' > a$,

$$m = a + b < a' + b \in A + B$$

und m kann ein grösstes Element nicht sein. Folgt $q \in \mathbb{Q}$ mit $p > q$ und ist $p \in A + B$, existiert $(a, b) \in A \times B$ so dass $p = a + b$ also

$$q' = q - b < a$$

und danke die Dedekinscher Schnitt Axiom, $q' \in A$ und $q = q' + b \in A + B$. Die Addition ist assoziativ, weil die Addition über $\mathbb{Q}$ diese Eigenschaft besitzt.

Für alle $A \in \mathbb{R}$, $A + 0_{\mathbb{R}} = \mathbb{Q} \cap \{a + b : a \in A, b < 0\} \subset A$ weil $a + b < a \in A$ für alle $b < 0$.

Sei $a \in A$. A hat kein grösstes Element und somit existiert $a' \in A$ mit $a' > a$. Also $a = a' + (a - a') \in A + 0_{\mathbb{R}}$ und $A \subset A + 0_{\mathbb{R}}$. Folglich gilt $A = A + 0_{\mathbb{R}}$.

Wir können auch überprüfen, dass $A + (-A) = 0_{\mathbb{R}}$. $A + (-A) \subset 0_{\mathbb{R}}$ ist klar. Sei $p \in \mathbb{Q}$ mit $p < 0$. A ist von oben beschränkt, also existiert $a_0 \in A$ so dass $a_0 - p/2 > a$ für alle $a \in A$. Somit für alle $a \in A$,

$$p - a_0 + a < \frac{p}{2} < 0$$

also $p - a_0 \in -A$ und folglich

$$p = (p - a_0) + a_0 \in (-A) + A.$$

Das sagen wir $A \geq 0$ genau dann, wenn $0_{\mathbb{R}} \subset A$ und $A > 0$ fall $A \geq 0$ und $A \neq 0_{\mathbb{R}}$. Für $A \geq 0$, und $B \geq 0$, definieren wir

$$A \cdot B = \mathbb{Q} \cap \{p : (\exists a \in A) \wedge (a \geq 0), (\exists b \in B) \wedge (b \geq 0) : p = ab\} \cup \mathbb{Q} \cap \{p : p < 0\}.$$

Für $A \geq 0$, $B \leq 0$, definieren wir

$$A \cdot B = -(A \cdot (-B))$$

und für $A \leq 0$, $B \leq 0$,

$$A \cdot B = (-A) \cdot (-B).$$

Die Multiplikation ist kommutativ und assoziativ (die Beweis ist ähnlich). Für $A > 0$,

$$A^{-1} = \mathbb{Q} \cap \{p : \exists \varepsilon \in (0,1), \forall a \in A \cap \{p : p > 0\}, a \cdot p < 1 - \varepsilon\}$$

ist die Inverse, und für $A < 0$,

$$A^{-1} = -(-A)^{-1}$$

Endlich, für alle $B \neq 0$, definiert

$$A/B = A \cdot (B^{-1}).$$

Sei $A \in \mathbb{R}$ mit $A > 0$. Dann $A \cdot A^{-1} \subset 1$ ist klar. Sei $p \in \mathbb{Q}$ mit $p < 1$.

Falls $p \leq 0$, für alle $a \in A \cap \{q : q > 0\}$, $a \cdot p \leq 0 < 1 - \varepsilon$ ($\varepsilon \in (0,1)$ beliebig) also $0_{\mathbb{R}} \subset A^{-1}$. Sei $a \in A \cap \{q : q > 0\}$. Dann $p \cdot a^{-1} \in A^{-1}$ und folglich

$$p = (p \cdot a^{-1}) \cdot a \in (A^{-1}) \cdot A.$$

Falls $0 < p < 1$, es gibt $1/\sqrt{p} > 1$ und A ist von oben beschränkt, also existiert $a_0 \in A \cap \{q : q > 0\} = A_+$ so dass

$$a < \frac{a_0}{\sqrt{p}} \quad \forall a \in A_+ \implies (p \cdot a_0^{-1}) \cdot a < \sqrt{p} = 1 - \varepsilon \quad \forall a \in A_+ \quad (\varepsilon = 1 - \sqrt{p} \in (0,1)).$$

Somit $p \cdot a_0^{-1} \in A^{-1}$ und folglich

$$p = (p \cdot a_0^{-1}) \cdot a_0 \in (A^{-1}) \cdot A.$$

(b) Dass ist klar, weil $\subset$ ein Ordnung ist.
$A \leq A$, da $A \subset A$.
Sollte $A \leq B$ und $B \leq A$, $A \subset B$ und $B \subset A$ also $A = B$.
Sollte $A \leq B$ und $B \leq C$, $A \subset B$ und $B \subset C$ also $A \subset C$, dass heisst $A \leq C$.

(c) Die Element

$$M = \bigcup U \in \mathbb{R}$$

ein Supremum ist.