I.

Wir berechnen die Grenzwerte in den Teilaufgaben (a), (c), (d) und (e) direkt mit der Regel von L'Hospital. In (b) ist der Grenzwert trivial, da die betrachtete Funktion in $\frac{\pi}{2}$ stetig ist. In (f) argumentieren wir etwas ausführlicher und führen den Grenzwert auf einen anderen Grenzwert zurück, der sich mit der Regel von L'Hospital berechnen lässt.

(a)

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin\left(\sqrt{1+t}-1\right)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos\left(\sqrt{1+t}-1\right)\frac{1}{2\sqrt{1+t}}}{1} = \frac{\cos(0)}{2} = \frac{1}{2}.$$

(b)

$$\lim_{t\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)+\sin(3t)}{\cos(2t)} = \frac{1+(-1)}{-1} = 0.$$

(c) Beachte, dass die Ableitung von $f(t) = a^t = \exp(t\log(a))$ durch $f'(t) = \log(a)a^t$ gegeben ist. Mit L'Hospital folgt somit

$$\lim_{t\to 0} \frac{3^t-1}{2^t-1} = \lim_{t\to 0} \frac{\log(3)3^t}{\log(2)2^t} = \frac{\log(3)}{\log(2)}.$$

(c) Wir benutzen die Stetigkeit der Quadratwurzel um zu zeigen:

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{\sqrt{1-\cos(t)}}{t} = \sqrt{\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos(t)}{t^2}} = \sqrt{\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{2t}} = \sqrt{\lim_{t\to 0} \frac{\cos(t)}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(d) ES gilt

$$\lim_{t\to 1} \frac{t^5-t^3}{\sqrt[3]{t}-\sqrt[5]{t}} = \lim_{t\to 1} \frac{5t^4-3t^2}{\frac{1}{3}t^{-2/3}-\frac{1}{5}t^{-4/5}} = \frac{5-3}{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}} = 15.$$

(e) Definitionsgemäss gilt

$$(1+2\sin(t))^{\cot t} = \exp\left(\cot(t)\log\left(1+2\sin(t)\right)\right) = \exp\left(\frac{\log\left(1+2\sin(t)\right)}{\tan(t)}\right).$$

und mit der Stetigkeit der Exponentialfunktion folgt

$$\lim_{t\to 0} (1+2\sin(t))^{\cot t} = \exp\left(\lim_{t\to 0} \frac{\log\left(1+2\sin(t)\right)}{\tan(t)}\right).$$

Wir berechnen mit L'Hospital

$$\lim_{t\to 0} \frac{\log\left(1+2\sin(t)\right)}{\tan(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{2\cos(t)}{1+2\sin(t)}}{1+\tan(t)^2} = 2.$$

Damit haben wir gezeigt

$$\lim_{t\to 0} (1+2\sin(t))^{\cot t} = e^2.$$

II.

(a) Es gilt

$$f'(x) = 3x^2-6x+3 = 3(x^2-2x+1) = 3(x-1)^2 \begin{cases} >0 & \text{falls } x\neq 1 \\ =0 & \text{falls } x=1. \end{cases}$$

Dann ist die Funktion f streng monoton steigend und hat an der Stelle $x=0$ ein globales Minimum (mit $f(0)=-5$) und an der Stelle $x=2$ ein globales Maximum (mit $f(2)=-3$).

(b) Es gilt

$$f'(x) = \left(\cos(x) - \frac{1}{2}\right) e^{\sin(x) - \frac{x}{2}} \begin{cases} > 0 \text{ falls } x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(2\pi - \frac{\pi}{3}, 6\right] \\ < 0 \text{ falls } x \in \left(\frac{\pi}{3}, 2\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\ = 0 \text{ falls } x = \frac{\pi}{3} \text{ oder } x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}. \end{cases}$$

Dann ist die Funktion f streng monoton steigend auf $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ und $\left[\frac{5\pi}{3}, 6\right]$ und streng monoton fallend auf $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$. Da $f(1) = 1$ und

$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = e^{-\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5\pi}{4}\right)} < 1 = f(1)$$

folgt, dass f an Stelle $x = \frac{5\pi}{3}$ ein globales Minimum $\left(\text{mit } f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = e^{-\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5\pi}{4}\right)}\right)$ an Stelle $x = \frac{\pi}{3}$ ein globales Maximum $\left(\text{mit } f\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}} > 1\right)$ hat.

(c) Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto -x^2$ ist streng monoton steigend auf $(-\infty, 0]$ und streng monoton fallend auf $[0, \infty)$ und die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton steigend also die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{-x^2}$ streng monoton steigend auf $(-\infty, 0]$ und streng monoton fallend auf $[0, \infty)$ ist.

Dann ist die Stelle $x = 0$ ein globales Maximum der Funktion f (mit $f(0) = 1$), und f hat keine lokalen Minima.

III.

(a) Wir wissen aus der Vorlesung, dass die Ableitung, dass $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ gilt. (Dabei ist $\frac{d}{dx} f(x)$ lediglich eine andere Notation für $f'(x)$). Mit der Kettenregel folgt sofort $\frac{d}{dx}(e^{-x}) = -e^{-x}$ und wir erhalten

$$\sinh'(x) = \frac{\frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

sowie

$$\cosh'(x) = \frac{\frac{d}{dx}(e^x) + \frac{d}{dx}(e^{-x})}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \cosh(x).$$

(b) Wir berechnen mit der Quotientenregel für die Aleitung

$$\tanh'(x) = \frac{\cosh(x)\sinh'(x) - \sinh(x)\cosh'(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x).$$

Aus der expliziten Formel

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

sieht man leicht, dass $|\tanh(x)| < 1$ gilt. Daraus folgt $\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x) > 0$ und somit ist $\tanh(x)$ streng monoton wachsend. Aus

$$\lim_{x \to \pm\infty} \tanh(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \pm 1$$

folgt nun, dass $\tanh(x)$ genau die Werte in $(-1, 1)$ annimmt und somit als Abbildung $\tanh : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ bijektiv ist.

(c) Mit einem Satz über die Differenzierbarkeit von Umkehrfunktionen aus der Vorlesung folgt, dass $\tanh^{-1}(y)$ differenzierbar ist mit der Ableitung

$$\left(\tanh^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{\tanh'(\tanh^{-1}(y))} = \frac{1}{1 - \tanh^2(\tanh^{-1}(y))} = \frac{1}{1 - y^2}.$$

IV.

(a) Wir berechnen mit der Kettenregel:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-x}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{-x\log(x)}\right) = e^{-x\log(x)}\frac{d}{dx}\left(-x\log(x)\right) = x^{-x}(-\log(x)-1).$$

(b) Mit der Kettenregel und dem Ergebnis aus Teil (a) folgt:

$$\frac{d}{dx}\left(\cos(x^{-x})\right) = -\sin(x^{-x})\frac{d}{dx}\left(x^{-x}\right) = \sin(x^{-x})x^{-x}(\log(x)+1).$$

(c) Es gilt

$$f'(x) = -\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}e^{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}\left(2xe^{x^2}\right) = \left(-\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} + 2\sqrt{x}\right)e^{x^2}.$$

(d) Es folgt direkt

$$f'(x) = \frac{1}{x\log(x)}.$$

(e) Es gilt

$$f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}\arctan(x) + \frac{1}{1-x^4}.$$

(f) Es gilt

$$\sin'(x) = \cos(x)$$

also

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}. \tag{1}$$

Aber sin ist streng monoton steigend auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ also ist arcsin streng monoton steigend auf $(-1,1)$, also ist

$$\arcsin'(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in (-1,1). \tag{2}$$

Damit folgt mit $\cos^2 + \sin^2 = 1$ und (1)

$$(\arcsin'(x))^2 = \frac{1}{\cos^2(\arcsin(x))} = \frac{1}{1-\sin^2(\arcsin(x))} = \frac{1}{1-x^2}. \tag{3}$$

Folglich gilt wegen (2) und (3)

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

V.

Definiere $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}x^q - ax.$$

Die Ableitung von dieser Funktion ist gegeben durch

$$f'(x) = x^{q-1} - a.$$

Die Gleichung $f'(x_0) = 0$ hat die eindeutige Lösung $x_0 := a^{\frac{1}{q-1}}$ und es gilt

$$f(x_0) = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}a^{\frac{q}{q-1}} - aa^{\frac{1}{q-1}} = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}a^{\frac{q}{q-1}} - a^{\frac{q}{q-1}} = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}a^p - a^p = 0.$$

Dabei haben wir benutzt, dass aus $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ durch umformen $p = \frac{q}{q-1}$ folgt.

Da $q > 1$ gilt, ist x^{q-1} eine streng monoton wachsende Funktion und es gilt $f'(x) < 0$ für $x \in [0, x_0)$ sowie $f'(x) > 0$ für $x \in (x_0, \infty)$. Insbesondere ist f auf dem Intervall $[0, x_0)$ streng monoton fallend, auf dem Intervall (x_0, ∞) streng monoton wachsend und die Funktion f nimmt an der Stelle x_0 ihr globales Minimum an. Für eine beliebige positive reelle Zahl $b \geq 0$ folgt

$$\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q - ab = f(b) \geq f(x_0) = 0$$

und dies ist genau die Young'sche Ungleichung.

VI.

(a) $F(x) = \dfrac{x^{a+1}}{a+1}$.

(b) $F(x) = \arctan(x) + \dfrac{x^4}{12} + \pi$

(c) $F(x) = -\dfrac{\cos(2x)}{4}$, da

$$F'(x) = \frac{\sin(2x)}{2} = \cos(x)\sin(x).$$

(d) $F(x) = \dfrac{1}{4}\sin(2x+1) + \dfrac{1}{2}x\cos(1)$, da

$$F'(x) = \frac{1}{2}\left(\cos(2x+1) + \cos(1)\right) = \cos(x)\cos(x+1).$$