I.

(a) Es gilt für alle $|x| < 1$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n.$$

(b) Es gilt für alle $|x| < 1$

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n+1}}{2^{2n}(2n+1)}$$

(c) Sei $g(x) = f(x+2)$. Denn gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g(x) = e^{x^2+4x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n(x+4)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k 4^{n-k} \right) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} x^{n+k} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{\{n+k=m\}} a_{n,k} \right) x^m = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{0 \le n \le m} a_{n,m-n} \right) x^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{0 \le n \le m} \binom{n}{m-n} \frac{4^m}{n!} \right) x^m \end{aligned}$$

mit

$$a_{n,k} = \binom{n}{k} \frac{4^{n-k}}{n!}.$$

Folglich gilt

$$f(x) = e^{x^2-4} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{0 \le n \le m} \binom{n}{m-n} \frac{4^m}{n!} \right) (x-2)^m$$

(d) Es gilt für alle $|x| < 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6} &= \frac{1}{(x-1)(x+2)(x-3)} = -\frac{1}{6(x-1)} + \frac{1}{15(x+2)} + \frac{1}{10(x-3)} \\ &= -\frac{1}{6} \frac{1}{1+x} + \frac{1}{30} \frac{1}{1+\frac{x}{2}} - \frac{1}{30} \frac{1}{1-\frac{x}{3}} \\ &= -\frac{1}{6} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k + \frac{1}{30} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^k - \frac{1}{30} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{6} + \frac{(-1)^k}{15 \cdot 2^{k+1}} - \frac{1}{10} \frac{1}{3^{k+1}} \right) x^k. \end{aligned}$$

II.

(a) Es gilt $\exp' = \exp > 0$ und exp ist streng monoton steigend und es folgt sofort, dass exp eine streng konvexe Funktion ist (und nicht konkav).

(b) **Variante 1.** Die Funktion exp ist streng konvex und $\log = \exp^{-1}$. Es folgt sofort, dass log eine streng konkave Funktion ist.

Variante 2. Es gilt für alle $x > 0$

$$\log'(x) = \frac{1}{x}$$

und die Funktion $(0, \infty) \to (0, \infty), x \mapsto \frac{1}{x}$ ist streng monoton fallend. Es folgt sofort, dass log streng konkav ist.

(b) Es gilt

$$f''(x) = 12x^2 - 12x + 12 = 6(x^2 - x + 1) = 6\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) > 0.$$

Folglich ist f streng konvex.

(d) Falls, $p > 0$ ist die Funktion f differenzierbar über $\mathbb{R}$ und gilt für alle $x \neq 0$

$$f'(x) = \begin{cases} px^{p-1} & \text{falls } x > 0 \\ -p(-x)^{p-1} & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Die stetig Funktion

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto p\,\mathrm{sgn}(x)|x|^{p-1}$$

ist streng monoton steigend also $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto |x|^p$ streng konvex ist. Falls $p = 1$ gilt für alle $\lambda \in [0, 1]$ und $x, y \in \mathbb{R}$ so dass $xy \geq 0$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Seien $\lambda \in [0, 1]$ und $x, y \in \mathbb{R}$ so dass $x < 0$ und $y > 0$. Falls $\lambda x + (1 - \lambda)y < 0$ gilt

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = -(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda f(x) - (1 - \lambda)f(y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

und falls $\lambda x + (1 - \lambda)y > 0$ gilt

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda x + (1 - \lambda)y = -\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Es folgt sofort, dass f konvex ist aber nicht konkav für $p = 1$. Falls $p < 1$ gilt für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f''(x) = p(p - 1)|x|^{p-2} < 0$$

aber f ist nicht konkav, da für alle $x \neq 0$ gilt

$$0 = \left|\frac{x + (-x)}{2}\right|^p < \frac{1}{2}\left(|x|^p + |-x|^p\right) = |x|^p.$$

III. ($\Longrightarrow$) Sei I eine offen Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Dann ist f stetig wegen die Gleichung

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

für alle $x, x_1, x_2 \in I$ so dass $x_1 < x < x_2$.

($\Longleftarrow$) Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3}{4}x + \frac{y}{4}\right) &= f\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x + y}{2}\right)\right) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f\left(\frac{x + y}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y)\right) \\ &= \frac{3}{4}f(x) + \frac{1}{4}f(y). \end{aligned}$$

Zeigen wir mit vollständige Induktion dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt für alle $0 \leq k \leq 2^n$ die Ungleichung

$$f\left(\frac{k}{2^n}x + \frac{2^n - k}{2^n}y\right) \leq \frac{k}{2^n}f(x) + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)f(y).$$

Induktionsschnitt. Sei $0 \leq k \leq 2^{n+1}$. Wenn $0 \leq k \leq 2^n$ gilt

$$f\left(\frac{k}{2^{n+1}}x + \frac{2^{n+1} - k}{2^{n+1}}y\right) = f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{k}{2^n}x + \frac{2^n - k}{2^n}y\right) + \frac{2^n}{2^{n+1}}y\right) = f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{k}{2^n}x + \frac{2^n - k}{2^n}y\right) + \frac{1}{2}y\right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2} f\left(\frac{k}{2^n}x + \frac{2^n-k}{2^n}y\right) + \frac{1}{2}f(y)\\
&\leq \frac{1}{2}\left(\frac{k}{2^n}f(x) + \frac{2^n-k}{2^n}f(y)\right) + \frac{1}{2}f(y)\\
&= \frac{k}{2^{n+1}}f(x) + \left(1-\frac{k}{2^{n+1}}\right)f(y)
\end{aligned}$$

und die Lösung ist symmetrisch wenn $k > 2^n$.

Sei $\lambda \in (0,1)$. Dann existiert $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ so dass für alle $j \in \mathbb{N}$, existiert $k_j, n_j \in \mathbb{N}$ so dass $1 \leq k_j \leq 2^{n_j} - 1$ und

$$\lambda_j = \frac{k_j}{2^{n_j}}, \quad \text{mit } \lambda_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \lambda.$$

Da f stetig ist gilt folglich

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lim_{j\to\infty} f(\lambda_j x + (1-\lambda_j)y) \leq \limsup_{j\to\infty}\Big(\lambda_j f(x) + (1-\lambda_j)f(y)\Big) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

IV. Falls $p = 1$ oder $p = \infty$ ist die Lösung trivial. Es gilt wegen Hölder Ungleichung

$$\begin{aligned}
\|z+w\|_p^p = \sum_{j=1}^n |z_j+w_j|^p = \sum_{j=1}^n s_j|z_j+w_j| \leq \sum_{j=1}^n s_j|z_j| + \sum_{j=1}^n s_j|w_j| \leq \|s\|_q\|z\|_p + \|s\|_q\|w\|_p\\
= \|z+w\|_p^{p-1}\left(\|z\|_p + \|w\|_p\right) \qquad (1)
\end{aligned}$$

da $(p-1)q = p$.

Wir können Aussagen dass $\|z+w\|_p \neq 0$, da $0 \leq \|z\|_p + \|w\|_p$. Dann gilt die Behauptung wegen (1).

V.

(a) Wir zeigen, dass f beliebig oft differenzierbar ist. Daraus folgt dann sofort, dass g ebenfalls beliebig oft differenzierbar ist.

Man sieht leicht, dass f auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ beliebig oft differenzierbar ist und wir behaupten, dass die n-te Ableitung von f die folgende Gestalt hat:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} R_n(x)e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0\\ 0 & x \leq 0\end{cases}.$$

wobei $R_n(x) = \frac{p_n(x)}{q_n(x)}$ eine rationale Funktion ist mit Polynomen $p_n(x)$ und $q_n(x)$. Da f für $x < 0$ konstant verschwindet, folgt sofort, dass $f^{(n)}(x) = 0$ für $x < 0$ gilt. Für $x > 0$ zeigen wir die Behauptung mittels Induktion. Zunächst gilt für $n = 1$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$$

und somit gilt die Behauptung mit $R_1(x) = \frac{1}{x^2}$. Im Induktionsschritt berechnen wir

$$f^{(n+1)}(x) = \Big(R_n(x)e^{-\frac{1}{x}}\Big)' = \left(R_n'(x) + \frac{1}{x^2}R_n(x)\right)e^{-\frac{1}{x}}$$

und die Behauptung folgt mit

$$R_{n+1} = R_n'(x) + \frac{1}{x^2}R_n(x) = \frac{p_n'(x)q_n(x) - p_n(x)q'(x)}{q_n(x)^2} + \frac{p_n(x)}{x^2 q_n(x)}.$$

Wir folgern nun, dass $f^{(n)}$ eine stetige Fortsetzung auf $\mathbb{R}$ besitzt, da für genügend grosses $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{x\downarrow 0} f^{(n)}(x) = \lim_{x\downarrow 0} R(x)e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\downarrow 0}(R_n(x)x^m)\left(x^{-m}e^{-\frac{1}{x}}\right) = 0.$$

In dem letzten Grenzwert haben wir verwendet, dass $R_n(x)x^m$ für $x \to 0$ gegen 0 konvergiert, falls m grösser als der Grad von $q_n(x)$ ist, sowie den bekannten Grenzwert

$$\lim_{x\downarrow 0} x^{-m} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} x^m e^{-x} = 0.$$

Nach dem Differenzierbarkeitssatz (siehe Königsberger 9.9, Seite 165), ist f dann an der Stelle $x = 0$ differenzierbar und für die Ableitungen gilt $f^{(n)}(0) = \lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$. (Genau genommen sagt der Differenzierbarkeitssatz nur etwas über die erste Ableitung aus. Mit $f^{(n)}(x) = f^{(n-1)}(x)'$ können wir ihn aber induktiv anwenden und erhalten die benötigte Aussage für die n-te Ableitung.)

1. Wir haben bereits gesehen, dass $f'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ für $x > 0$ und $f'(x) = 0$ für $x \le 0$ gilt. Somit ist f monoton wachsend und, da $g'(x) = f'(1-x)$ gilt, ist g ebenfalls monoton wachsend. Die zweite Behauptung, $\operatorname{sign}(g(x)) = \operatorname{sign}(x)$, ergibt sich aus

$$g(x) > 0 \quad\Leftrightarrow\quad f(1) > f(1-x) \quad\Leftrightarrow\quad x > 0$$

$$g(x) < 0 \quad\Leftrightarrow\quad f(1) < f(1-x) \quad\Leftrightarrow\quad x < 0.$$

Schliesslich beobachten für $x > 1$, dass $f(1-x) = 0$ gilt und somit $g(x) = f(1) - f(1-x) = f(1)$ erfüllt ist.

2. Mit der Kettenregel folgt $\beta'(x) = e^e f'(g(x))g'(x)$. Da f und g nach Teil (b) monoton wachsend sind, gilt $f'(g(x)) \ge 0$ und $g'(x) \ge 0$. Also gilt auch $\beta'(x) \ge 0$ und somit ist β monoton wachsend.

In Teil (b) haben wir gesehen, dass $\operatorname{sign}(g(x)) = \operatorname{sign}(x)$ gilt. Insbesondere folgt aus $x \le 0$ also $g(x) \le 0$ und somit ist $\beta(x) = e^e f(g(x)) = 0$ erfüllt. Falls $x \ge 1$ gilt, haben wir in Teil (b) gesehen, dass $g(x) = f(1)$ gilt und somit

$$\beta(x) = e^e f(f(1)) = e^e f(e^{-1}) = e^e e^{-e} = 1.$$

3. Wir definieren glatte Funktionen $\rho_1, \rho_2 : \mathbb{R} \to [0,1]$ durch

$$\rho_1(x) = \beta\left(\frac{x-(a-\varepsilon)}{\varepsilon}\right) \qquad \rho_2(x) = \beta\left(\frac{b+\varepsilon-x}{\varepsilon}\right).$$

Aus Teil (b) folgt, dass ρ_1 monoton wachsend ist mit $\rho_1(x) = 0$ für $x \le (a-\varepsilon)$ und $\rho_1(x) = 1$ für $x \ge a$, und, dass ρ_2 monoton fallend ist mit $\rho_2(x) = 1$ für $x \le b$ und $\rho_2(x) = 0$ für $x \ge (b+\varepsilon)$. Dann erfüllt

$$\rho : \mathbb{R} \to [0,1], \qquad \rho(x) = \rho_1(x)\rho_2(x)$$

die geforderten Eigenschaften: $\rho(x) = 1$ für $x \in [a,b]$, $\rho(x) = 0$ für $x \notin [a-\varepsilon, b-\varepsilon]$ und ρ ist monoton wachsend bzw. fallend auf den Intervallen $[a-\varepsilon, a]$ und $[b, b+\varepsilon]$.

VI.

(a) Seien Ω die Menge der Zerlegungen von $[a,b]$ und $\sigma = (a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b) \in \Omega$. Für alle $0 \le j \le n-1$, definiere $I_j = [x_j, x_{j+1}]$, und $0 < C < \infty$ so dass

$$|g(x) - g(y)| \le C|x-y| \text{ für alle } x, y \in [a,b]. \tag{2}$$

Für alle beschrankte Funktion $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ definiere

$$S_+(h,\sigma) = \sum_{j=0}^{n-1}\left(\sup_{I_j} h\right)(x_{j+1}-x_j), \quad S_-(h,\sigma) = \sum_{j=0}^{n-1}\left(\inf_{I_j} h\right)(x_{j+1}-x_j)$$

und

$$\delta(\sigma) = \max_{0\le j\le n-1}(x_{j+1}-x_j)$$

Dann h ist Riemann integrierbar wenn

$$\lim_{\substack{\sigma\in\Omega \\ \delta(\sigma)\to 0}} S_+(h,\sigma) - S_-(h,\sigma) = 0. \tag{3}$$

Wegen (2) gilt für alle $0 \leq j \leq n-1$ und $x, y \in I_j$ die Ungleichung

$$g \circ f(x) - g \circ f(y) \leq |g(f(x)) - g(f(y))| \leq C|f(x) - f(y)| \leq C \left(\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f \right)$$

Seien $(x_n), (y_n\} \subset [a, b]$ so dass

$$g \circ f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sup_{I_j} g \circ f, \quad g \circ f(y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \inf_{I_j} g \circ f.$$

Dann gilt wegen

$$\sup_{I_j} g \circ f - \inf_{I_j} g \circ f = \lim_{n\to\infty} \Big(g \circ f(x_n) - g \circ f(y_n) \Big) \leq C \left(\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f \right)$$

Folgich gilt

$$\begin{aligned} S_+(g \circ f, \sigma) - S_-(g \circ f, \sigma) &= \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sup_{I_j} g \circ f - \inf_{I_j} g \circ f \right) (x_{j+1} - x_j) \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f \right) (x_{j+1} - x_i) = C\Big(S_+(f, \sigma) - S_-(f, \sigma) \Big) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \limsup_{\substack{\sigma\in\Omega \\ \delta(\sigma)\to 0}} S_+(g \circ f, \sigma) - S_-(g \circ f, \sigma) &= \limsup_{\substack{\sigma\in\Omega \\ \delta(\sigma)\to 0}} |S_+(g \circ f, \sigma) - S_-(g \circ f, \sigma)| \\ &\leq C \limsup_{\substack{\sigma\in\Omega \\ \delta(\sigma)\to 0}} |S_+(f, \sigma) - S_-(f, \sigma)| = 0. \end{aligned}$$

(b) Die Funktion f ist beschrankt und für alle $-\infty < m < M < \infty$ sind die Funktionen $g : [m, M] \to \mathbb{R}, x \to x^2$ und $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ Lipschitz also $|f|$ und f^2 Riemann integrierbar sind.

(c) Falls $g|_{f([a,b])} = 0$ ist die Lösung trivial. Sei $\varepsilon > 0$, und $\delta > 0$ so dass

$$\delta \|g|_{f([a,b])}\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{4}$$

und für alle $x, y \in f([a, b])$,

$$|x - y| < \delta \implies |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{5}$$

Die Funktion f ist Riemann integrierbar also existiert $\sigma = (a = x_0 < x_1 < \cdots x_n = b) \in \Omega$ so dass

$$S_+(f, \sigma) - S_-(f, \sigma) < \delta^2. \tag{6}$$

Für alle $j \in \{0, \cdots, n-1\}$ definiere

$$M_i = \sup_{I_j} f, \quad m_i = \inf_{I_j} f$$

und

$$J = \{0, \cdots, n-1\} \cap \{j : M_j - m_j \geq \delta\}.$$

Dann gilt wegen (6)

$$\delta \sum_{j\in J} (x_{j+1} - x_j) \leq \sum_{j\in J} (M_j - m_j)(x_{j+1} - x_j) \leq S_+(f, \sigma) - S_-(f, \sigma) < \delta^2$$

also

$$\sum_{j\in J}(x_{j+1}-x_j)<\delta. \tag{7}$$

Damit folgt wegen (5)

$$\text{für alle } j\notin J,\quad \sup_{I_j} g\circ f-\inf_{I_j} g\circ f\le \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \tag{8}$$

Folglich gilt wegen (4), (7) und (8)

$$S_+(g\circ f,\sigma)-S_-(g\circ f,\sigma)=\sum_{j\notin J}\left(\sup_{I_j} g\circ f-\inf_{I_j} g\circ f\right)(x_{j+1}-x_j)+\sum_{j\in J}\left(\sup_{I_j} g\circ f-\inf_{I_j} g\circ f\right)(x_{j+1}-x_j)$$

$$\le \sum_{j\notin J}\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(x_{j+1}-x_j)+\sum_{j\in J}\|g|_{f([a,b])}\|_\infty(x_{j+1}-x_j)$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{j=0}^{n-1}(x_{j+1}-x_j)+\delta\|g|_{f([a,b])}\|_\infty$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\cdot(b-a)+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$