I. Seien $-\infty < a < b < \infty$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine monton steigend Funktion, $\sigma = (a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b)$ ein Zerlegungen von $[a, b]$, und $I_j = [x_j, x_{j+1}]$ für alle $0 \leq j \leq n-1$. Damit folgt

$$\begin{aligned} 0 \leq S_+(f,\sigma) - S_-(f,\sigma) &= \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f \right) (x_{j+1} - x_j) = \sum_{j=0}^{n-1} (f(x_{j+1}) - f(x_j))\,(x_{j+1} - x_j) \\ &\leq \delta(\sigma) \sum_{j=0}^{n-1} (f(x_{j+1}) - f(x_j)) = (f(b) - f(a))\delta(\sigma) \xrightarrow[\delta(\sigma)\to 0]{} 0 \end{aligned}$$

und f ist Riemann intergrierbar. Wenn f monoton fallend ist benutzen wir $-f$.

II. Wenn $b > a^2$ gilt

$$\begin{aligned} \int \frac{cx+d}{x^2+2ax+b}\,dx &= \frac{c}{2}\log\left|x^2+2ax+b\right| + \frac{d-ac}{b-a^2}\arctan\left(\frac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}\right) + C \\ &= \frac{c}{2}\log\left(x^2+2ax+b\right) + \frac{d-ac}{b-a^2}\arctan\left(\frac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}\right) + C. \end{aligned}$$

Wenn $b = a^2$, wir haben

$$\int \frac{cx+d}{x^2+2ax+b} = \int \frac{cx+d}{(x+a)^2} = \int \left(\frac{c}{x+a} + \frac{d-ac}{(x+a)^2}\right) = c\log|x+a| + \frac{(ac-d)}{x+a} + C.$$

Folglich, wenn $b < a^2$ und

$$r_1 = -a - \sqrt{a^2-b}, \quad r_2 = -a + \sqrt{a^2-b}.$$

Sei $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ so dass

$$\frac{cx+d}{x^2+2ax+b} = \frac{cx+d}{(x+r_1)(x+r_2)} = \frac{\lambda_1}{x+r_1} + \frac{\lambda_2}{x+r_2}.$$

Denn gilt

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = c \\ \lambda_1 r_2 + \lambda_2 r_1 = d. \end{cases}$$

Da

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_2 & r_1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} r_1 & -1 \\ -r_2 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt folglich

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} r_1 & -1 \\ -r_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{cr_1 - d}{r_1 - r_2} \\ \frac{-cr_2 + d}{r_1 - r_2}. \end{pmatrix}$$

und

$$\int \frac{cx+d}{x^2+2ax+d} = \lambda_1 \log|x+r_1| + \lambda_2 \log|x+r_2| + C.$$

III.

(a) Die Partialbruchzerlegung lautet

$$\frac{t+2}{t^2(t^2+2)} = \frac{t/2+1}{t^2} - \frac{t/2+1}{t^2+2} = \frac{1}{2t} + \frac{1}{t^2} - \frac{t/2+1}{t^2+2}.$$

Wir verwenden Aufgabe **II.** um den letzten Term zu integrieren und erhalten

$$\begin{aligned} \int \frac{t+2}{t^2(t^2+2)}\,dt &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt + \int \frac{1}{t^2}\,dt - \int \frac{t/2+1}{t^2+2}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\log(t) - \frac{1}{t} - \frac{1}{4}\log(t^2+2) - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + C \end{aligned}$$

(b) Wir beobachten zunächst, dass $t = 1$ eine Nullstelle von $t^3 + t^2 - t - 1$ ist. Mit Polynomdivision können wir den Nenner faktorisieren und erhalten

$$t^3 + t^2 - t - 1 = (t-1)(t^2 + 2t + 1) = (t-1)(t+1)^2$$

Hieraus können wir die Gestalt der Partialbruchzerlegung ablesen und erhalten als Ergebnis

$$\frac{t}{(t-1)(t^2+2)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{t-1}{(t+1)^2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t-1}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t-1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(t+1)^2}\right).$$

Für das Intergral ergibt sich damit

$$\begin{aligned}\int \frac{t}{t^3+t^2-t-1}\,dt &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{t-1}\,dt - \frac{1}{4}\int \frac{1}{t+1}\,dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(t+1)^2}\,dt \\ &= \frac{1}{4}\log|t-1| - \frac{1}{4}\log|t+1| - \frac{1}{2(1+t)} + C.\end{aligned}$$

(c) Wir können den Integranden vereinfachen, indem wir im Zähler eine Polynomdivision durch $(t^2+1)^2$ sowie durch (t^2+1) durchführen. Damit meinen wir nichts anderes als die elementare Rechnung

$$t^4 + 1 = (t^2+1)^2 - 2t = (t^2+1)^2 - 2(t^2+1) + 2$$

aus welcher wir sofort die Identität

$$\frac{t^4}{(t^2+1)^2} = 1 - \frac{2}{t^2+1} + \frac{2}{(t^2+1)^2}$$

folgern. Den letzten Term können wir nicht direkt integrieren, aber er hat die gleiche Gestalt wie $f_2(x)$ in Aufgabe 3. Wir können also ähnlich wie in der Lösung von Aufgabe 3 (b) verfahren und mit partieller Intergration die Potenz im Nenner verringern. Das führt zu der Rechnung

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{(t^2+1)^2} &= \int \frac{2}{t^2+1} + t\cdot\frac{-2t}{(t^2+1)^2}\,dt \\ &= 2\arctan(t) + t\cdot\frac{1}{(t^2+1)} - \int \frac{1}{t^2+1}\,dt \\ &= \arctan(t) + \frac{t}{t^2+1}\end{aligned}$$

Wir erhalten somit

$$\begin{aligned}\int \frac{t^4}{(t^2+1)^2}\,dt &= \int dt - 2\int \frac{1}{t^2+1}\,dt + \int \frac{2}{(t^2+1)^2)} \\ &= t - \arctan(t) + \frac{t}{t^2+1} + C.\end{aligned}$$

Alternativ könnte man das Integral auch mit einer komplexen Partialbruchzerlegung berechnen (vgl. Königsberger 11.6).

(d) Die Nullstellen $t^6 - 1$ sind gegeben durch die 6. Einheitswurzeln $\zeta_k = \exp\left(\frac{2\pi k}{6}\mathbf{i}\right)$. Indem wir die Linearfaktoren komplex konjugierter Nullstellen zusammenfassen, erhalten wir die Faktorisierung

$$(t^6-1) = (t-1)(t+1)(t^2-t+1)(t^2+t+1).$$

Aus dieser Faktorisierung können wir die dazugehörige PBZ ausrechnen und erhalten

$$\frac{1}{t^6-1} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} + \frac{t-1}{t^2-t+1} - \frac{t+1}{t^2+t+1}\right).$$

Mit (**??**) können wir die letzten zwei Terme integrieren und erhalten

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{t^6-1}\,dt &= \frac{1}{6}\int \frac{1}{t-1}\,dt - \frac{1}{6}\int \frac{1}{t+1}\,dt + \frac{1}{6}\int \frac{t-1}{t^2-t+1}\,dt - \frac{1}{6}\int \frac{t+1}{t^2+t+1}\,dt \\ &= \frac{1}{6}\log|t-1| - \frac{1}{6}\log|t+1| \\ &\quad + \frac{1}{12}\log|t^2-t+1| - \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) \\ &\quad - \frac{1}{12}\log|t^2+t+1| - \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C\end{aligned}$$

(e) Wir beobachten zunächst, dass $t = -1$ eine Nullstelle von t^3+1 ist. Mit Polynomdivision bekommen wir die Faktorisierung

$$t^3 + 1 = (t+1)(t^2 - t + 1)$$

und damit können wir die Partialbruchzerlegung berechnen und erhalten

$$\frac{1}{t^3+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{t+1} + \frac{-t+2}{t^2-t+1}\right).$$

Mit Aufgabe **II.** können wir den letzten Bruch integrieren und erhalten

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{t^3+1}\,dt &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{t+1}\,dt + \frac{1}{3}\int \frac{-t+2}{t^2-t+1}\,dt \\ &= \frac{1}{3}\log|t+1| - \frac{1}{6}\log|t^2-t+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) + C\end{aligned}$$

(f) Wir erhalten zunächst mit partieller Integration

$$\int t^3 \arctan(t)\,dt = \frac{1}{4}t^4\arctan(t) - \frac{1}{4}\int \frac{t^4}{t^2+1}\,dt.$$

Den letzten Bruch vereinfachen wir mittel Polynomdivision zu

$$\frac{t^4}{t^2+1} = t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1}$$

und erhalten somit

$$\begin{aligned}\int t^3\arctan(t)\,dt &= \frac{1}{4}t^4\arctan(t) - \frac{1}{4}\int t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1}\,dt \\ &= \frac{1}{4}t^4\arctan(t) - \frac{1}{12}t^3 + \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}\arctan(t) + C\end{aligned}$$

IV.

(a) Wir erhalten mit zweifacher partieller Integration

$$\begin{aligned}\int \sin^2(t)e^{-t}\,dt &= -\sin^2(t)e^{-t} + \int 2\cos(t)\sin(t)e^{-t}\,dt \\ &= -\sin^2(t)e^{-t} - 2\cos(t)\sin(t)e^{-t} + \int \left(-2\sin^2(t) + 2\cos^2(t)\right)e^{-t}\,dt\end{aligned}$$

Wenn wir auf beiden Seiten $4\int \sin^2(t)e^{-t}\,dt$ addieren und die trigonometrische Identität $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ benutzen, folgt

$$\begin{aligned}5\int \sin^2(t)e^{-t}\,dt &= -\sin^2(t)e^{-t} - 2\cos(t)\sin(t)e^{-t} + \int 2e^{-t}\,dt \\ &= -\sin^2(t)e^{-t} - 2\cos(t)\sin(t)e^{-t} - 2e^{-t}\end{aligned}$$

und somit

$$\int \sin^2(t)e^{-t}\,dt = -\frac{1}{5}\left(\sin^2(t) + 2\cos(t)\sin(t) + 2\right)e^{-t} + C$$

(b) Das Integral ist vom Typ (11) im Königsberger 11.6.II. Wir benutzen entsprechend die Substitution $u = \tan(\frac{t}{2})$ um das Integral auf das Integral einer rationalen Funktion zurückzuführen. Mit den Beziehungen

$$\cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \qquad dt = \frac{dt}{du}\,du = \left(\frac{d}{du}2\arctan(t)\right)du = \frac{2}{1+u^2}\,du$$

liefert dann die Substitutionsregel

$$\int \frac{1}{1+\cos(t)}\,dt = \int \frac{1}{1+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}\,du = \int 1\,du = u = \tan(t/2) = \frac{\sin(t)}{1+\cos(t)}$$

Der letzte Schritt ist ein *bekannte* trigonometrische Identität und eher eine Geschmacksfrage als eine wirkliche Vereinfachung.

(c) Wir erhalten mit zweifacher partieller Integration

$$\begin{aligned}\int \sinh(t)\cos(t)\,dt &= \cosh(t)\cos(t) + \int \cosh(t)\sin(t)\,dt \\ &= \cosh(t)\cos(t) + \sinh(t)\sin(t) - \int \sinh(t)\cos(t)\,dt\end{aligned}$$

Das gesuchte Integral taucht auf beiden Seiten der Gleichung auf und wir können danach auflösen. Damit erhalten wir

$$\int \sinh(t)\cos(t)\,dt = \frac{1}{2}\left(\cosh(t)\cos(t) + \sinh(t)\sin(t)\right) + C.$$

(d) Das Integral ist vom Typ (9) im Königsberger 11.6.ii. Entsprechend benutzen wir die Substitution $t = \sinh(u)$. Damit gilt dann

$$\sqrt{t^2+1} = \cosh(u), \qquad dt = \cosh(u)du$$

und mit der Substitutionsregel folgt

$$\int \frac{t^3}{\sqrt{t^2+1}}\,dt = \int \frac{\sinh(u)^3}{\cosh(u)} \cdot \cosh(u)\,du = \int \sinh^3(u)\,du.$$

Mit den Definitionen $\sinh(u) = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u})$ sowie $\cosh(u) = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u})$ können wir das rechte Integral leicht ausrechnen:

$$\begin{aligned}\int \sinh^3(u)\,du &= \int \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right)^3 du \\ &= \frac{1}{8}\int e^{3u} - 3e^u - 3e^{-u} + e^{-3u}\,du \\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}e^{3u} - 3e^u - 3e^{-u} + \frac{1}{3}e^{-3u}\right) \\ &= \frac{1}{24}\left(e^u + e^{-u}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(e^u + e^{-u}\right) \\ &= \frac{1}{3}\cosh^3(u) - \cosh(u)\end{aligned}$$

Mit der Beziehung $\cosh(u) = \sqrt{t^2+1}$ können wir das Ergebnis wieder in t ausdrücken und erhalten

$$\int \frac{t^3}{\sqrt{t^2+1}}\,dt = \frac{1}{3}\left(t^2+1\right)^{\frac{3}{2}} - \left(t^2+1\right)^{\frac{1}{2}} + C$$

(e) Beachte, dass der Integrand nur für $t \in (0,1)$ wohldefiniert ist. Es macht also Sinn die Substitution $u^2 = t$ zu betrachten. Dann gilt $dt = 2u\,du$ und mit der Substitutionsregel folgt

$$\int \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{t}-t}\,dt = \int \frac{\sqrt{1-u^2}}{u-u^2} \cdot 2u\,du = 2\int \frac{\sqrt{1-u^2}}{1-u}\,du$$

Wir formen den Integranden weiter um zu

$$\frac{\sqrt{1-u^2}}{1-u} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{1-u^2}{1-u} = \frac{1+u}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Für verbleibenden Ausdrücke können wir die Stammfunktionen direkt angeben. (Beim zweiten Audrück könnte man alternativ auch ähnlich wie in Teil (d) weiter substituieren, wenn man die Stammfunktion nicht direkt sieht.) Wir erhalten

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{t}-t}\,dt &= 2\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du + 2\int \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\,du = 2\arcsin(u) - 2\sqrt{1-u^2} \\ &= 2\arcsin\left(\sqrt{t}\right) - 2\sqrt{1-t} + C\end{aligned}$$

(f) Wir führen zunächst die Substitution $e^t = u^2$ durch. Mit $dt = \frac{2}{u}\,du$ liefert die Substitutionsregel dann

$$\int \frac{1}{1+e^t}\,dt = \int \frac{1}{1+u^2}\frac{2}{u}\,du = \int \frac{2}{u\sqrt{1+u^2}}\,du.$$

Um das letzte Integral auszurechnen substituieren wir erneut $s = \frac{1}{u}$ und mit $du = \frac{-1}{s^2}ds$ folgt dann

$$\int \frac{2}{u\sqrt{1+u^2}}\,du = \int \frac{2s}{\sqrt{1+s^{-2}}}\cdot\frac{1}{s^2}\,ds = -2\int \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}\,ds = -2\operatorname{arcsinh}(s)$$

Aus der Beziehung $s = u^{-1} = e^{-t/2}$ erhalten wir somit

$$\int \frac{1}{1+e^t}\,dt = \operatorname{arcsinh}\left(e^{-\frac{t}{2}}\right) + C.$$

V.

(a) Wir Formen $f_1(x)$ mittels quadratischer Ergänzung um und erhalten

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2+2ax+b} = \frac{1}{(x+a)^2+b-a^2} = \frac{1}{b-a^2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}\right)^2+1}.$$

Damit sieht man direkt (oder mit der Substitution $y = \dfrac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}$), dass

$$F_1(x) = \int f_1(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{b-a^2}}\arctan\left(\frac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}\right)$$

eine Stammfunktion für $f_1(x)$ ist.

Um eine Stammfunktion für $xf_1(x)$ zu finden, schreiben wir

$$xf_1(x) = \frac{x}{x^2+2ax+b} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2a}{x^2+2ax+b} - \frac{a}{x^2+2ax+b}.$$

Dabei hat der erste Bruch die Gestallt $h'(x)/h(x)$ mit $h(x) = x^2+2ax+b$. Mit der Substitution $y = h(x)$ folgt dann

$$\begin{aligned} G_1(x) = \int xf_1(x)\,dx &= \frac{1}{2}\log\left|x^2+2ax+b\right| - aF_1(x) \\ &= \frac{1}{2}\log\left|x^2+2ax+b\right| - \frac{a}{\sqrt{b-a^2}}\arctan\left(\frac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}\right). \end{aligned}$$

(b) Beachte zunächste die Identität

$$f'_{k-1}(x) = -(k-1)f_k(x)(2x+2a) = (2-2k)xf_k(x) + a(2-2k)f_k(x).$$

Da $f_{k-1}(x)$ offensichtlich eine Stammfunktion für $f'_{k-1}(x)$ ist und eine Stammfunktion für den Ausdruck auf der rechten Seite durch $2(1-k)G_k(x) + 2a(1-k)F_k(x)$ gegeben ist, folgt

$$f_{k-1}(x) = (2-2k)G_k(x) + a(2-2k)F_k(x) + C_k$$

für eine Konstante $C_k \in \mathbb{R}$ oder äquivalent

$$G_k(x) - \frac{C_k}{2-2k} = \frac{1}{2-2k}f_{k-1}(x) - aF_k(x).$$

Wenn wir $G_k(x)$ durch $G_k(x) - C_k/(2-2k)$ ersetzen ist die erste Rekursion erfüllt.

Die zweite Rekursionsformel bestimmen wir mit einem analogen Ansatz, wobei wir die Ableitung von $xf_{k-1}(x)$ betrachten. In der Rechnung verwenden wir die Formel für $f'_{k-1}(x)$ von oben und erhalten

$$(xf_{k-1}(x))' = f_{k-1}(x) + xf'_{k-1}(x) = f_{k-1}(x) - x(k-1)(2x+2a)f_k(x)$$

$$\begin{aligned}
&= f_{k-1}(x) - (2k-2)(x^2+ax)f_k(x) \\
&= f_{k-1}(x) - (2k-2)axf_k(x) - (2k-2)x^2 f_k(x) \\
&= f_{k-1}(x) - (2k-2)axf_k(x) - (2k-2)f_{k-1}(x) + (2k-2)(2ax+b)f_k(x) \\
&= (3-2k)f_{k-1}(x) + a(2k-2)xf_k(x) + b(2k-2)f_k(x)
\end{aligned}$$

Indem wir zu Stammfunktionen übergehen, erhalten wir

$$xf_{k-1}(x) = (3-2k)F_{k-1}(x) + a(2k-2)G_k(x) + b(2k-2)F_k(x) + \tilde{C}_k$$

für eine Konstante $\tilde{C}_k \in \mathbb{R}$. Mit der ersten Rekursionsformel folgt nun

$$xf_{k-1}(x) = (3-2k)F_{k-1}(x) - af_{k-1}(x) - a^2(2k-2)F_k(x) + b(2k-2)F_k(x) + \tilde{C}_k$$

oder äquivalent

$$F_k(x) - \frac{\tilde{C}_k}{(2k-2)(b-a^2)} = \frac{x+a}{(2k-2)\,(b-a^2)} f_{k-1}(x) + \frac{2k-3}{(2k-2)\,(b-a^2)} F_{k-1}(x).$$

Wenn wir $F_k(x)$ durch $F_k(x) - \tilde{C}_k / \big((2k-2)(b-a^2)\big)$ ersetzen erhalten wir die zweite Rekursionsformel.

VI.

(a) Es gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

(b) Es gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\log(2).$$

(c) Es gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2k}{n}}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+2x}} = \left[\sqrt{1+2x}\right]_0^1 = \sqrt{3}-1.$$

(d) Sei

$$a_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Dann gilt

$$\log a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\log(n+k)-\log(n)) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \log(1+x)dx = 2\log(2)-1$$

also

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{4}{e}.$$

(e) Sei

$$a_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Dann gilt

$$\log a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2\log(2)-1$$

also

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{4}{e}.$$

(f) Es gilt für alle $1 \leq k \leq n$, $\dfrac{k}{n^2} \leq \dfrac{1}{n}$ also

$$1 \leq \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} \leq 1+\frac{1}{n}$$

und

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

VII.

(a) Es gilt

$$\int_1^2 \log(t)dt = [t\log(t)]_1^2 - \int_1^2 dt = 2\log(2)-1.$$

(b) Es gilt

$$\int_0^1 \frac{tdt}{\sqrt{1+t^2}} = \left[\sqrt{1+t^2}\right]_0^1 = \sqrt{2}-1.$$

(c) Es gilt für alle $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

$$\begin{cases} \cos(x)+\sin(x) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right) \\ \log(1+\tan(x)) = \log(\cos(x)+\sin(x)) - \log\cos(x) = \frac{1}{2}\log(2) + \log\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right) - \log\cos(x) \end{cases}$$

und

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right) \underset{\frac{\pi}{4}-x=t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos(t)dt$$

also

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan(x))dx = \frac{\pi}{8}\log(2) + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos(x)dx = \frac{\pi}{8}\log(2).$$

(d) Es gilt mit $t = \sin(x)$

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2x)}{2}dx = \frac{\pi}{4}.$$

(e) Es gilt mit $x = \log(t)$

$$\int_1^{e^\pi} \sin(\log(t))dt = \int_0^\pi \sin(x)e^x dx = \operatorname{Im}\int_0^\pi e^{(1+i)x}dx = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{(1+i)\pi}-1}{1+i}\right) = \frac{e^\pi+1}{2}.$$

(f) Es gilt

$$\int_0^1 \log\left(1+t^2\right) dt = \log(2) - \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2} dt = \log(2) - 2 + \int_0^1 \frac{2dt}{1+t^2} = \log(2) + \frac{\pi}{2} - 2.$$

(g) Es gilt

$$\int_1^\infty \frac{\log(t)}{(1+t)^2} dt = \left[-\frac{\log(t)}{1+t}\right]_1^\infty + \int_1^\infty \frac{dt}{t(t+1)} = \left[\log\left(\frac{t}{t+1}\right)\right]_1^\infty = \log(2).$$

(h) Es gilt mit $x = \sqrt{1+e^t}$

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+e^t}} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e+1}} \frac{2dx}{x^2-1} = \left[\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e+1}} = \log\left(\frac{(\sqrt{e+1}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{e+1}+1)(\sqrt{2}-1)}\right)$$

(i) Es gilt mit $x = \cos(t)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\log(\sin(t))dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\log\sqrt{1-\cos^2(t)}dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\log(1-x) + \log(1+x)\right) dx = \log(2) - 1.$$