I.

(a) Sei $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ die *stetige* Funtion so dass für alle $x \in [a,b]$ gilt

$$g(x) = \int_a^b f(x)p(x)dx - f(x)\int_a^b p(x)dx.$$

Die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist stetig also existiert $x_1, x_2 \in [a,b]$ so dass

$$f(x_1) = \inf f([a,b]), \quad f(x_2) = \sup f([a,b]).$$

Da $p \geq 0$ gilt für alle $x \in [a,b]$

$$f(x_1)p(x) \leq f(x)p(x) \leq f(x_2)p(x).$$

Dann gilt

$$f(x_1)\int_a^b p(x)dx \leq \int_a^b f(x)p(x)dx \leq f(x_2)\int_a^b p(x)dx$$

oder

$$g(x_2) \leq 0 \leq g(x_1).$$

Folgich existiert wegen der Zwischenwertsatz ein punkt $\xi \in [a,b]$ so dass

$$0 = g(\xi) = \int_a^b f(x)p(x)dx - f(\xi)\int_a^b p(x)dx.$$

(b) Es gilt wegen die Taylor formel für alle $x \in [a,b]$

$$f(x) = T_n f(x) + R_{n+1}(x) = T_n f(x) + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

Existiert wegen (a) ein punkt $\xi \in [a,b]$ so dass

$$R_{n+1}(x) = f^{(n+1)}(\xi)\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Damit folgt die Behauptung.

II.

(a) Sei $b = -\log(a) = |\log(a)| > 0$. Dann gilt

$$\sum_{n\geq 0} a^{\sqrt{n}} = \sum_{n\geq 0} e^{\sqrt{n}\log(a)} = \sum_{n\geq 0} e^{-b\sqrt{n}} < \infty$$

da

$$\int_0^\infty e^{-b\sqrt{x}}dx \underset{y=\sqrt{x}}{=} \int_0^\infty 2ye^{-by}dy = \left[-\frac{2}{b}ye^{-by}\right]_0^\infty + \frac{2}{b}\int_0^\infty e^{-by}dy = \frac{2}{b^2} < \infty$$

und ($\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, x \mapsto e^{-n\sqrt{x}}$ ist monoton fallend)

$$\sum_{n\geq 0} e^{-b\sqrt{n}} = 1 + \sum_{n\geq 0} e^{-b\sqrt{n+1}} \leq 1 + \sum_{n\geq 0}\int_n^{n+1} e^{-b\sqrt{x}}dx = 1 + \int_0^\infty e^{-b\sqrt{x}}dx = 1 + \frac{2}{b^2} < \infty.$$

(b) Die Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 - \cos(x) - x$ ist so dass $f(0) = 0$, $f(x) < 0$ für alle $x > 0$, also die Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend ist und $u_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent nach 0. Da für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$1 - \cos(x) \leq \frac{x^2}{2}$$

wir haben für alle $n \geq 0$ (triviale Induktion)

$$u_n \leq \frac{1}{2}u_{n-1}^2 \leq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}u_{n-2}^4 \leq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}u_{n-3}^8 \leq \left(\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{2^{2^k}}\right)u_0^{2^n} = \frac{u_0^{2^n}}{2^{2^{n+1}-1}} = 2\left(\frac{u_0}{4}\right)^{2^n}.$$

und (da $u_0 < \pi < 4$)

$$0 \leq \sum_{n\geq 0}|u_n| = \sum_{n\geq 0}u_n \leq \sum_{n\geq 0}2\left(\frac{u_0}{4}\right)^{2^n} \leq 2\sum_{k\geq 0}\left(\frac{u_0}{4}\right)^k = \frac{2}{1-\frac{u_0}{4}} = \frac{8}{4-u_0} < \frac{8}{4-\pi} < \infty.$$

(c) Die Funktion $(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\log^2(x)$ ist monoton steigend also gilt für alle $k\geq 2$, und $k\leq x\leq k+1$

$$\log^2(k)\leq\log^2(x)\leq\log^2(k+1).$$

Dann gilt

$$\log^2(k)\leq\int_k^{k+1}\log^2(x)dx\leq\log^2(k+1) \tag{1}$$

und für alle $n\geq 2$

$$\sum_{k=2}^{n}\log^2(k)\leq\int_2^n\log^2(x)dx\leq\sum_{k=3}^{n+1}\log^2(k)=\sum_{k=2}^{n}\log^2(k)+\log^2(n+1)-\log^2(2). \tag{2}$$

Wir haben

$$\begin{aligned}\int_2^n\log^2(x)dx &= \left[x\log^2(x)\right]_2^n-\int_2^n x\cdot\frac{2}{x}\cdot\log(x)dx\\ &= n\log^2(x)-2\log^2(2)-\left[2x\log(x)\right]_2^n+2\int_2^n x\cdot\frac{1}{x}dx\\ &= n\log^2(n)-2n\log(n)+2(n-2)-2\log^2(2)\\ &= n\log^2(n)\left(1+O\left(\frac{1}{\log(n)}\right)\right).\end{aligned} \tag{3}$$

Folglich gilt wegen (2) und (3)

$$\sum_{k=2}^{n}\log^2(n)=n\log^2(n)\left(1+O\left(\frac{1}{\log(n)}\right)\right)$$

und

$$a_n=\frac{n^\alpha}{\sum_{k=2}^{n}\log^2(k)}=\frac{1}{n^{1-\alpha}\log^2(n)}\left(1+O\left(\frac{1}{\log(n)}\right)\right)$$

Dann gilt wegen das Integralkriterium

$$\int_2^\infty\frac{dx}{x^{1-\alpha}\log^2(x)}\begin{cases}=\infty & \text{falls } \alpha>0\\ <\infty & \text{falls } \alpha\leq 0\end{cases}$$

und die Reihe $\sum_{n\geq 0}a_n$ konvergiert genau dann, wenn $\alpha\leq 0$.

(d) Wenn $\alpha\neq -1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n}k^\alpha\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}}$$

konvergiert genau dann, wenn $\alpha + 1 > 1$ oder $\alpha > 0$. Wenn $\alpha = -1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log(n) + O(1)$$

und $\log(x) \leq x$ für alle $x > 0$. Damit existiert $0 < c < \infty$ so dass

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{c}{n} = c \log(N) + O(1) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

III. Es gilt

(a) $y(x) = \lambda_1 e^{-\frac{1}{2}(7+\sqrt{109})x} + \lambda_2 e^{-\frac{1}{2}(7-\sqrt{109})x}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

(b) $y(x) = \lambda_1 e^{x} + \lambda_2 e^{-x} + \lambda_3 \cos(x) + \lambda_4 \sin(x)$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$.

(c) $y(x) = (\lambda_1 + \lambda_2 x)\cos(\sqrt{2}x) + (\lambda_3 + \lambda_4 x)\sin(\sqrt{2}x)$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$.

(d) $y(x) = \lambda_1 + \lambda_2 x + \frac{1}{25}\Big\{\lambda_3\left(4\cos(2x) + 3\sin(2x)\right) + \lambda_4\left(3\cos(2x) - 4\sin(2x)\right)\Big\}e^{x}$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$.

IV.

(a) Wir berechnen die allgemeine homogene Lösung und dazu die Nullstellen von

$$z^2 + 4 = (z + 2i)(z - 2i).$$

Die allgemeine Lösung des homogenen Problems ist also

$$y(x) = \lambda_1 \cos(2x) + \lambda_2 \sin(2x)$$

mit unbestimmten Konstanten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Sei λ_1, λ_2 zwei Funktionen und

$$y_0(x) = \lambda_1(x)\cos(2x) + \lambda_2(x)\sin(2x)$$

so dass

$$\begin{cases} \lambda_1'(x)\cos(2x) + \lambda_2'(x)\sin(2x) = 0, \\ -2\lambda_1'(x)\sin(2x) + 2\lambda_2'(x)\cos(2x) = \dfrac{1}{\sin(2x)} \end{cases} \tag{4}$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$, die Matrix

$$R(x) = \begin{pmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -2\sin(2x) & 2\cos(2x) \end{pmatrix}$$

ist invertierbar (da $\det R(x) = 2\cos^2(2x) + 2\sin^2(2x) = 2 \neq 0$) und

$$R(x)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\cos(2x) & -\sin(2x) \\ 2\sin(2x) & \cos(2x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2x) & -\frac{1}{2}\sin(2x) \\ \sin(2x) & \frac{1}{2}\cos(2x) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Dann gilt wegen (4) und (5)

$$\begin{cases} \lambda_1'(x) = -\dfrac{1}{2} \\ \lambda_2'(x) = \dfrac{\cos(2x)}{2\sin(2x)}. \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} \lambda_1(x) = -\dfrac{x}{2}, \\ \lambda_2(x) = \dfrac{1}{4}\log|\sin(2x)|. \end{cases}$$

Folglich gilt

$$y(x) = \lambda_1\cos(2x) + \lambda_2\sin(2x) - \frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\log|\sin(2x)|\sin(2x), \ \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Es gilt $y(t) = \lambda_1 e^{-t} + \lambda_2 e^{-2t} + \dfrac{2}{3}e^t$, mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

(c) Es gilt $y(t) = \lambda_1 e^{-t} + \lambda_2 e^{-2t} + \dfrac{1}{4}(2t-3)$, mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

(d) Es gilt $y(t) = \lambda_1\cos(t) + \lambda_2\sin(t) + \cos(t)\log\left|\frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)-\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)+\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right|$, mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

(e) Es gilt $y(t) = \lambda_1\cos(3x) + \lambda_2\sin(3x) + \dfrac{1}{9}\sin(3x)\log\left|\tan\left(\dfrac{3x}{2}\right)\right|$, mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

V. Es gilt

(a) $y(x) = \frac{1}{4}\left(1 + 2x(x-1) - 9e^{-2x}\right)$.

(b) $y(x) = \sin(x) - \cos(x) + (\pi+1)e^{-x}$.

(c) Es gilt $y(x) = \left(\lambda_1 + \dfrac{1}{6}x^2\right)e^x + \left(\lambda_2\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \lambda_3\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)e^{-\frac{1}{2}x}$ also existiert $\mu \in \mathbb{R}$ so dass

$$y'(x) = \left(\lambda_1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{6}\right)e^x + \left(\left(-\frac{\lambda_2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_3\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \left(-\frac{\lambda_3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$y''(x) = \left(\lambda_1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x + \frac{x^2}{6}\right)e^x + \left\{-\frac{1}{2}\left(-\frac{\lambda_2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_3\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\lambda_3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2\right)\right\}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{1}{2}x}$$
$$+\mu\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{1}{2}x}$$
$$= \left(\lambda_1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x + \frac{x^2}{6}\right)e^x - \frac{1}{2}\left(\lambda_2 + \sqrt{3}\lambda_3\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{1}{2}x} + \mu\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{1}{2}x}$$

und

$$\begin{cases} y(0) = \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ y'(0) = \lambda_1 + \dfrac{1}{2}\left(-\lambda_2 + \sqrt{3}\lambda_3\right) = 1, \\ y''(0) = \lambda_1 + \dfrac{1}{2}\left(-\lambda_2 - \sqrt{3}\lambda_3\right) + \dfrac{1}{3} = -1 \end{cases}$$

Folglich gilt

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\dfrac{2}{9} \\ \lambda_2 = \dfrac{2}{9} \\ \lambda_3 = \dfrac{7}{3\sqrt{3}} \end{cases}$$

und

$$y(x) = \left(\frac{x^2}{6} - \frac{2}{9}\right)e^x + \left(\frac{2}{9}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{7}{3\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)e^{-\frac{1}{2}x}.$$

(d) Es existiert $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ so dass

$$y(x) = \left(\lambda_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \lambda_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) e^{\frac{x}{2}} + x + 1 - e^x - \sin(x).$$

Wenn $x = 0$ gilt

$$1 = y(0) = \lambda_1$$

also $\lambda_1 = 1$, und

$$y'(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{\frac{x}{2}} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\lambda_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{\frac{x}{2}} + 1 - e^x - \cos(x).$$

Dann gilt

$$0 = y'(0) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2 - 1$$

oder

$$\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Folglich gilt

$$y(x) = \left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)e^{\frac{x}{2}} + x + 1 - e^x - \sin(x).$$

VI. Die Substitution $x = e^t$ und $h(t) = y(e^t)$ liefert

$$h(t) = y(e^t) = y(x), \qquad h'(x) = y'(e^t)e^t = xy'(x)$$

$$h''(t) = y''(e^t)e^{2t} + y'(e^t)e^t = x^2y''(x) + xy'(x).$$

Wir erhalten damit die Beziehungen

$$x^2y''(x) = h''(t) - h'(t), \qquad xy'(x) = h'(t), \qquad y(x) = h(t).$$

(a) Die Gleichung ist äquivalent zu

$$h''(t) - 4h(t) + 5h(t) = 0.$$

Das charakteristische Polynom $\lambda^2 - 4\lambda + 5$ hat die Nullstellen $2 \pm \mathbf{i}$ und somit lautet die allgmeine Lösung

$$h(t) = c_1e^{2t}\cos(t) + c_2e^{2t}\sin(t)$$

sowie

$$y(x) = h(\log(x)) = c_1x^2\cos(\log(x)) + c_2x^2\sin(\log(x)).$$

(b) Die Gleichung ist äquivalent zu

$$2h'(t) - h(t) = t.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $2h'(t) - h(t) = 0$ ist gegeben durch $h_{hom}(t) = c_1e^{\frac{t}{2}}$. Eine particuläre Lösung ist gegeben durch $h_p(t) = -(2+t)$ und somit lautet die allgemeine Lösung

$$h(t) = h_{hom}(t) + h_p(t) = c_1e^{\frac{t}{2}} - 2 - t.$$

Damit folgt

$$y(x) = h(\log(x)) = c_1\sqrt{x} - 2 - \log(x).$$

VII. Wir lösen zunächst die homogene Gleichung $y'(t) = a(t)y(t)$. Bezeichne mit $A(t)$ eine Stammfunktion von $a(t)$, dann liefert der Ansatz der Separation der Variablen

$$\int \frac{dy}{y} = \int a(t)\,dt \quad \Leftrightarrow \quad \log|y| = A(t) + c \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = \pm e^c \cdot e^{A(t)}.$$

Beachte, dass $\pm e^c$ eine beliebige reelle Konstante bezeichnet, welche wir der Übersichtlichkeit wegen einfach mit c bezeichnen. Damit lautet die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y(t) = ce^{A(t)}.$$

Variation der Konstanten bedeutet, dass wir den Ansatz $y(t) = c(t)y_h(t)$ mit $y_h(t) = e^{A(t)}$ machen. Da y_h die homogene Gleichung löst erhalten wir mit diesem Ansatz

$$y'(t) = c'(t)y_h(t) + c(t)y_h'(t) = c'(t)y_h(t) + c(t)a(t)y_h(t) = c'(t)y_h(t) + a(t)y(t).$$

Somit ist die Gleichung $y'(t) = a(t)y(t) - b(t)$ äquivalent zu

$$c'(t)y_h(t) = -b(t) \quad \Leftrightarrow \quad c(t) = -\int \frac{b(t)}{y_h}\,dt + c_0 = -\int b(t)e^{-A(t)}\,dt + c_0$$

und wir erhalten die allgemeine Lösung

$$y(t) = \left(c_0 - \int b(t)e^{-A(t)}\,dt\right)e^{A(t)}.$$

VIII. Die Substitution $z(t) = \frac{1}{y(t)}$ führt auf eine lineare DGL in $z(t)$. Siehe Königsberger I, 13.1.II für diesen Ansatz.

Wir skizzieren im folgenden die Lösung mit Separation der Variablen

$$\int \frac{dy}{ay - by^2} = \int 1\,dx + C$$

Mit der PBZ

$$\frac{1}{ay - by^2} = \frac{1}{ay} + \frac{b/a}{a - by}$$

können wir das linke Integral leicht berechnen und erhalten

$$\frac{1}{a}\log\left(\frac{y}{a - by}\right) = x + C.$$

Exponieren beider Seiten liefert

$$\frac{y}{a - by} = e^{aC}e^{ax}$$

und somit lautet die allgemeine Lösung

$$y(t) = \frac{ae^{aC}e^{ax}}{1 + be^{aC}e^{ax}} = \frac{e^{ax}}{e^{-aC} + \frac{b}{a}e^{ax}}.$$

Aus der Anfangsbedingung $y(0) = y_0$ können wir die Konstante C bestimmen und erhalten als Lösung für das AWP

$$y(t) = \frac{e^{ax}}{\frac{1}{y_0} + \frac{b}{a}(e^{ax} - 1)}.$$

Offenbar konvergiert diese Lösung für jede Anfangsbedingung $y_0 > 0$ gegen $\frac{b}{a}$.

IX.

(a) Die Substitution $v(x) = \frac{y(x)}{x}$ liefert

$$y(x) = xv(x), \qquad y'(x) = v(x) + xv'(x)$$

und die DGL ist äquivalent zu

$$x(v(x) + xv'(x)) = xv(x) + x^2 \quad \Leftrightarrow \quad v'(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad v(x) = x + c$$

Es folgt

$$y(x) = x(x + c)$$

und aus der Anfangsbedingung $y(1) = 2$ folgt $c = 1$.

(b) Separation der Variablen liefert

$$\int \frac{dy}{e^y} = \int \sin(x)\,dx + C \quad \Leftrightarrow \quad -e^{-y} = -\cos(x) + C$$

und umformen liefert die allgemeine Lösung

$$y(x) = -\log(\cos(x) - C).$$

Aus der Anfangsbedingung $y(0) = -1$ folgt $C = 1 - e$ und somit erhalten wir als Lösung für das AWP

$$y(x) = -\log(\cos(x) + e - 1).$$

(c) Separation der Variablen liefert

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1-x^2} + C \quad \Leftrightarrow \quad \log|y| = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C$$

und somit

$$y(x) = \pm e^C \cdot \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Die Anfangsbedingung $y(1) = 1$ aus der Aufgabenstellung können wir nicht erfüllen, da die rechte Seite für $x = 1$ nicht definiert ist. Bereits die DGL ist an der Stelle $x = 1$ nicht wohl-definiert. Alternativ bestimmen wir die Lösung für das AWP $y(0) = 1$, und erhalten in diesem Fall $C = 0$.

X. Es gilt

(a) $y(x) = \cos(\omega x) + \dfrac{\cos(\omega_0 x) - \cos(\omega x)}{\omega^2 - \omega_0^2}$.

(b) $y(x) = \dfrac{1}{20}\left(3\cos(2x) - \sin(2x)\right) + \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x},\ \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$

XI. Siehe Königsberger I, Kapitel 13.3, für eine ausführliche Diskussion dieser Aufgabe.

Zusätzliche Aufgaben

XII. Mit eine triviale Induktion gilt für alle $n \geq 0$ die Ungleichung $u_n > 0$.

(a) Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{1+u_n} - u_n = \frac{1 + u_n - u_n^2}{\sqrt{1+u_n} + u_n} \tag{6}$$

Falls $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nach $l \in \mathbb{R}$ gilt $l \geq 0$ und $l = \sqrt{l+1}$ oder

$$l^2 - l - 1 = 0.$$

Da $l \geq 0$ gilt

$$l = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$$

Wenn $u_0 = \varphi$ ist die Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konstant. Falls $0 < u_0 < \varphi$, zeigen wir mit vollstandige Induktion dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$0 < u_n < \varphi. \tag{7}$$

Es gilt

$$u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} < \sqrt{1+\varphi} = \sqrt{\varphi^2} = \varphi.$$

Dann ist die Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend wegen (6) und (7) also $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi$.

Falls $u_0 > \varphi$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $u_n > \varphi$, also $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi$.

(b) Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|u_n - \varphi| = \left|\sqrt{1+u_{n-1}} - \sqrt{1+\varphi}\right| = \left|\frac{u_{n-1}-\varphi}{u_{n-1}+2+\varphi}\right| \leq \frac{1}{2+\varphi}|u_{n-1}-\varphi| \leq \frac{1}{(2+\varphi)^n}|u_0-\varphi|$$

aber $2+\varphi > 1$ also

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n - l| \leq \sum_{n\geq 0} \frac{|u_0-\varphi|}{(2+\varphi)^n} = \frac{|u_0-\varphi|}{1-\frac{1}{2+\varphi}} = \frac{2+\varphi}{1+\varphi}|u_0-\varphi| < \infty$$

XIII. Sei $s \in \mathbb{R}$ mit $s > 1$. Es gilt für alle $N \geq 1$

$$\sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n^s} + \frac{1}{(N+1)^s} - 1 = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)^s} \leq \int_1^N \frac{dx}{x^s} \leq \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n^s} + \frac{1}{(N+1)^s} - 1.$$

Damit folgt wenn $N \to \infty$

$$\zeta(s) - 1 \leq \int_1^\infty \frac{dx}{x^s} \leq \zeta(s)$$

und

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1}.$$

Folglich gilt

$$(s-1)\zeta(s) = 1 + O(s-1) \underset{s\to 1}{\longrightarrow} 1.$$

XIV.

(a) Es gilt für alle $0 < x < \frac{\pi}{2}$ die Ungleichung $\frac{2}{\pi}x < \sin(x) < x$. Dann gilt

$$u_{n+1} - u_n = \sin(u_n) - u_n < 0$$

also $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und $u_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Folglich ist die Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent nach 0.

(b) Es gilt für alle $x \geq 0$

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$$

$$u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(u_k) - u_k \geq -\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{n-1} u_k^3$$

Folgich gilt

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} u_k^3 \leq 6(u_0 - u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 6u_0 < \infty.$$

(c) Es gilt für alle $x > -1$ die Ungleichung

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \log(1+x) \leq x.$$

also

$$1 - \frac{x^2}{6} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$$

$$-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{72} \leq \log\left(1-\frac{x^2}{6}\right) \leq \log\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) \leq 0.$$

Da $\sum_{n\geq 0} u_n^3$ konvergiert gilt folglich

$$\sum_{n\geq 0} u_n^4 < \infty. \tag{8}$$

Damit folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left|\log\left(\frac{u_n}{u_0}\right)\right| = -\left(\log(u_n)-\log(u_0)\right) = -\sum_{k=0}^{n-1}\log\left(\frac{\sin(u_n)}{u_n}\right) \leq \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{n-1}u_k^2 - \frac{1}{72}\sum_{k=0}^{n-1}u_k^4$$

Da $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left|\log\left(\frac{u_n}{u_0}\right)\right| = \infty$$

und wegen (8) die Reihe $\sum_{n\geq 0} u_n^4$ konvergiert also gilt folglich

$$\infty = \lim_{n\to\infty}\left|\log\left(\frac{u_n}{u_0}\right)\right| + \frac{1}{72}\sum_{k=0}^{\infty}u_k^4 \leq \frac{1}{6}\liminf_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}u_k^2 = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{\infty}u_k^2.$$

XV. Für alle $n \geq m$ gilt

$$B\left(z_n, \frac{1}{2}\right) \cap B\left(z_m, \frac{1}{2}\right) = \varnothing. \tag{9}$$

Für alle $N \geq 1$, definiere

$$A_N = \mathbb{N} \cap \{n : |z_n| \leq N-1\}$$

Dann gilt $B(z_n, 1/2) \subset B(0,N)$ für alle $n \in A_N$. Damit folgt wegen (9)

$$\mathrm{Area}(A_N) = \sum_{n\in A_N}\mathrm{Area}\left(B\left(z_n,\frac{1}{2}\right)\right) = \mathrm{Kard}(A_N)\frac{\pi}{4} \leq \mathrm{Area}(B(0,N)) = \pi N^2$$

und

$$\mathrm{Kard}(A_N) \leq 4N^2. \tag{10}$$

Da $\mathrm{Kard}(A_N) < \infty$ für alle $N \in \mathbb{N}$ existiert eine Bijektion $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ so dass $\left\{|z_{\sigma(n)}|\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend ist. Wir haben wegen (10)

$$|z_{\sigma(4N^2+1)}| > N \tag{11}$$

und $\left\{|z_{\sigma(n)}|\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend ist. Die Folge $\left\{|z_{\sigma(n)}|\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend also es existiert wegen (11) ein Konstant $0 < c < \infty$ so dass für alle $n \geq 1$

$$|z_{\sigma(n)}| \geq c\sqrt{n}.$$

Folglich gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|z_{\sigma(n)}|^3} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c^3 n^{\frac{3}{2}}} < \infty.$$

Damit ist die Reihe $\sum_{n\geq 0}|z_{\sigma(n)}|^{-3}$ konvergent also die Reihe $\sum_{n\geq 0}|z_n|^{-3}$ auch konvergent ist.

XVI. (22. [Arn02]) Falls y analytisch im Ursprung, sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ so dass

$$y(x) = \sum_{n\geq 1} a_n x^n.$$

Dann gilt für alle $x \neq 0$

$$yy' = xy + x^3 = \sum_{n\geq 2} \left(a_{n-1} + \mathbf{1}_{\{n=3\}}\right) x^n$$

und

$$yy' = \left(\sum_{n\geq 1}(n+1)a_{n+1}x^n\right)\left(\sum_{n\geq 1} a_n x^n\right) = \sum_{n\geq 1}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}a_{n-k}\right)x^n.$$

Folglich gilt

$$\begin{cases} a_1^2 = (0+1)a_{0+1}a_1 = 0, \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}a_{n-k} = a_{n-1} + \mathbf{1}_{\{n=3\}}, \text{ für alle } n \geq 2. \end{cases}$$

Damit gilt $a_1 = 0$, und folgt für alle $n \geq 2$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}a_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-2}(k+1)a_{k+1}a_{n-k}.$$

Es folgt sofort, dass für alle $n \geq 2$

$$\sum_{k=1}^{n-2}(k+1)a_{k+1}a_{n-k} = a_{n-1} + \mathbf{1}_{\{n=3\}}.$$

Mit $n = 3$ folgt

$$(1+1)a_2 \cdot a_2 = a_2 + 1$$

oder

$$2a_2^2 - a_2 - 1 = 0.$$

Dann gilt

$$a_2 = 1, \text{ oder } a_2 = -\frac{1}{2}.$$

Mit $n = 4$ gilt

$$(1+1)a_2 \cdot a_3 + (1+2)a_3 \cdot a_2 = a_3$$

oder

$$(5a_2 - 1)a_3 = 0.$$

Da $a_2 = 1$ oder $a_2 = -\frac{1}{2}$ gilt folglich $5a_2 - 1 \neq 0$ und

$$a_3 = 0.$$

Zeigen wir mit vollständige Induktion dass für alle $n \geq 3$ gilt

$$a_n = 0.$$

Induktionsschnitt. Falls $a_k = 0$ für alle $3 \leq k \leq n-1$ folgt

$$\sum_{k=1}^{(n+1)-2}(k+1)a_{k+1}a_{n+1-k} = (1+1)a_2 \cdot a_n + (1 + (n-1))a_n \cdot a_2 = a_n$$

oder

$$((n+2)a_2 - 1)\, a_n = 0. \tag{12}$$

Falls $a_2 = 1$ gilt

$$(n+2)a_2 - 1 = (n+1) \neq 0$$

und falls $a_2 = -\frac{1}{2}$ gilt

$$(n+2)a_2 - 1 = -\frac{1}{2}\,(n+4) \neq 0.$$

Damit folgt wegen (12) dass $a_n = 0$ ist für alle $n \geq 3$.

Folglich sind die Lösungen

$$y_1(x) = x^2, \text{ und } y_2(x) = -\frac{1}{2}x^2,$$

da

$$\begin{aligned} y_1' &= 2x = x + \frac{x^3}{x^2} = x + \frac{x^3}{y_1}, \\ y_2' &= -x = x - 2x = x + \frac{x^3}{-\frac{1}{2}x^2} = x + \frac{x^3}{y_2}. \end{aligned}$$

Bemerkung. Wir können auch direkt zeigen dass $y''(0) \neq 0$ wenn wir Schreiben $y\, y' = xy + x^3$.

Literatur

[Arn02] Vladimir I. Arnold. Trivium mathématique. *Unpublished note*, 2002.