**Aufgabe I.** Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$A = \mathbb{R} \cap \{y : y^n < x\}\,.$$

Dann ist $A$ eine beschränkte Teilmenge. Somit existiert $r \in \mathbb{R}$, so dass $r = \sup A$. Es folgt leicht, dass $r^n = x$.

**Aufgabe II.**

$$(a)\;\; z = 41 + 11i, \qquad (c)\;\; z = \frac{1}{29}(28 - 17i)\,, \qquad (e)\;\; z = -i, \pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},$$

$$(b)\;\; z = -4(1+i), \qquad (d)\;\; z = \frac{1}{13}(6 - 35i)\,, \qquad (f)\;\; z = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} + \frac{i}{\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}}\right)$$

$(f)$ ist nicht trivial. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ so dass

$$(a + ib)^2 = -1 + i. \tag{1}$$

(1) ist äquivalent zu

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -1 \\ ab = \dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{2}$$

also ($a \neq 0$ weil $-1 + i \notin \mathbb{R}$) gilt

$$a^2 - \frac{1}{4a^2} = -1$$

oder

$$a^4 + a^2 - \frac{1}{4} = 0.$$

Somit gilt

$$a^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$$

aber $a^2 > 0$, also

$$a = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

und (dank (2))

$$b = \frac{1}{2a} = \pm\frac{1}{\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}}.$$

**Aufgabe III.**

Es gilt

$$(a)\;\; \frac{z^3 - 3z^2 + 3z - 1}{z - 1} = (z-1)^2, \qquad (c)\;\; \frac{4z^4 - 12z^3 + 3z^2 + 13z - 6}{2z^2 + z - 1} = (z-2)(2z-3),$$

$$(b)\;\; \frac{z^3 - 4z^2 - 11z - 6}{z + 1} = (z+1)(z-6), \qquad (d)\;\; \frac{z^n - 1}{z - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} z^k.$$

$(d)$ Es gilt

$$(z-1)\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \sum_{k=0}^{n-1} z^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \sum_{j=1}^{n} z^j - \sum_{k=0}^{n-1} z^k = z^n - 1 + \sum_{j=1}^{n-1} z^j - \sum_{k=1}^{n-1} z^k = z^n - 1.$$

## Aufgabe IV.

Es gilt

$$(a)\ P(z) = \left(z - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(z - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right), \qquad (c)\ P(z) = (z+i)(z-2i)(z-5)$$

$$(b)\ P(z) = (z+1)^2(z-2), \qquad (d)\ P(z) = (z-2)^4.$$

## Aufgabe V.

(a) Sei $w \in \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$. Dann gilt $f(z) = w$ genau dann, wenn

$$\frac{az+b}{cz+d} = w \Leftrightarrow az+b = w(cz+d) \Leftrightarrow (a-cw)z = dw-b \tag{3}$$

aber $w \neq \frac{a}{c}$ also

$$z = \frac{dw-b}{-cw+a}.$$

Wir müssen auch zeigen, dass

$$cz+d \neq 0.$$

Es gilt

$$cz+d = \frac{ad-bc}{-cw+a} \neq 0 \Leftrightarrow ad-bc \neq 0 \tag{4}$$

also, falls $f$ surjektiv ist,

$$ad-bc \neq 0 \tag{5}$$

Folglich ist

$$\begin{cases} f\left(\frac{-d}{c}\right) = \infty \\ f(\infty) = \frac{a}{c} \end{cases}$$

und $f$ surjektiv, wenn $ad-bc \neq 0$.

Dank (3), falls $z \neq \infty$

$$f(z) = \frac{a}{c} \Leftrightarrow 0 = dw-b = \frac{1}{c}(ad-bc) \tag{6}$$

und das ist nicht möglich wegen (5). Offensichtlich gilt $f(z) \neq \infty$ für alle $z \in (\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}) \cup \{\infty\}$. Seien $z, z' \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ so dass $f(z) = f(z')$. Diese Gleichung gilt genau dann, wenn

$$aczz' + bcz + adz + bd = aczz' + bcz + adz' + bd \Leftrightarrow (ad-bc)z = (ad-bc)z' \Leftrightarrow z = z' \quad \text{(dank (5))}.$$

Folglich ist $f$ bijektiv genau dann, wenn $ad-bc \neq 0$.

(b) Wir zeigen zuerst, dass jede Lösungsmenge der Gleichung

$$a|z|^2 + bz + \overline{b}\overline{z} + c = 0 \tag{7}$$

mit $|b|^2 - ac > 0$ eine Gerade oder ein Kreis ist $(*)$.

**Schritt 1:** *Falls $a = 0$, so ist die Lösungsmenge eine Gerade.*

Die Gleichung vereinfacht sich zu

$$2b_1x - 2b_2y + c = 0$$

und aus der Bedinung $|b|^2 - ac > 0$ folgt sofort $b \neq 0$. Die Lösung dieser Gleichung beschreibt eine Gerade.

**Schritt 2:** *Falls $a \neq 0$, so ist die Lösungsmenge ein Kreis.*

Wir formen die Gleichung mit quadratischer Ergänzung um:

$$\begin{aligned}
&a(x^2+y^2) + 2b_1x - 2b_2y + c = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 + 2\frac{b_1}{a}x + y^2 - 2\frac{b_2}{a}y + \frac{c}{a} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left(x + \frac{b_1}{a}\right)^2 + \left(y - \frac{b_2}{a}\right)^2 - \left(\frac{b_1}{a}\right)^2 - \left(\frac{b_2}{a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left(x + \frac{b_1}{a}\right)^2 + \left(y - \frac{b_2}{a}\right)^2 = \frac{b_1^2 + b_2^2 - ac}{a^2}
\end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung sehen wir sofort, dass die Lösungsmenge ein Kreis mit Mittelpunkt $-\frac{b_1}{a} + i\frac{b_2}{a} = -\frac{1}{a}\bar{b}$ und Radius $r^2 = \frac{b_1^2 + b_2^2 - ac}{a^2} = \frac{|b|^2 - ac}{a^2} > 0$.

Sei $S \subset \mathbb{C}$ ein Kreis oder eine Gerade. Nach Teil (a) können wir $S$ als Lösungsmenge der Gleichung (7) schreiben für geeignete Parameter $a, b, c$. Wenn wir die Gleichung (7) durch $|z|^2 = z\bar{z}$ dividieren, erhalten wir

$$a + b\frac{1}{\bar{z}} + \bar{b}\frac{1}{z} + c\frac{1}{|z|^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c|I(z)|^2 + \bar{b}I(z) + \overline{\bar{b}I(z)} + a = 0.$$

Die Bildmenge $I(S)$ ist folglich ebenfalls gegeben durch eine Gleichung der Form (7) mit den Parametern $\tilde{a} = c$, $\tilde{b} = \bar{b}$, $\tilde{c} = a$. Nach Teil $(*)$ ist also $I(S)$ ein Kreis oder eine Gerade.

## Aufgabe VI.

1. Man erhält die Formel aus dem binomischen Lehrsatz und durch Vertauschen der Summationsreihenfolge:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{p+1} \binom{p+1}{k} S_n^{p+1-k} &= \sum_{k=1}^{p+1}\sum_{l=1}^{n} \binom{p+1}{k} l^{p+1-k} \\
&= \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{p+1} \binom{p+1}{k} l^{p+1-k} \cdot 1^k \\
&= \sum_{l=1}^{n} (l+1)^{p+1} - l^{p+1} \\
&= (n+1)^{p+1} - 1
\end{aligned}$$

2. Wir wenden induktiv die Formel aus (a) an:

$p = 0$: Wir erhalten $S_n^0 = (n+1)^1 - 1 = n$.

$p = 1$: Wir erhalten $2S_n^1 + S_n^0 = (n+1)^2 - 1$ und folglich

$$\begin{aligned}
S_n^1 &= \frac{1}{2}\left((n+1)^2 - 1 - S_n^0\right) \\
&= \frac{1}{2}(n^2 - 2n - n) \\
&= \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

$p = 2$: Wir erhalten $3S_n^2 + 3S_n^1 + S_n^0 = (n+1)^3 - 1$ und folglich

$$S_n^2 = \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - 1 - 3S_n^1 - S_n^0\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6}(2n^3 - 6n^2 - 6n - 1 + 3(n^2 - n) - n) = \\
&= \frac{1}{6}(2n^3 - 3n^2 - 8n - 1) \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

$p = 3$: Wir erhalten $4S_n^3 + 6S_n^2 + 4S_n^1 + S_n^0 = (n+1)^4 - 1$ und folglich

$$\begin{aligned}
S_n^3 &= \frac{1}{4}\left((n+1)^4 - 1 - 6S_n^2 - 4S_n^1 - S_n^0\right) \\
&= \frac{1}{4}\left((n+1)^4 - 1 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - n\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(n^4 + 2n^3 + n^2\right) \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4}
\end{aligned}$$

Beachte, dass $S_n^3 = (S_n^1)^2$. Wie kann man das direkt zeigen (siehe am Ende)?

3. Die Rechnungen aus (b) legen die Vermutung nahe, dass die höchste vorkommende Potenz in $S_n^p$ die Ordnung $p+1$ hat mit Koeffizienten $\frac{1}{p+1}$. Wir beweisen diese Behauptung mittels Induktion. Die Formel aus (a) besagt:

$$\binom{p+1}{1} S_n^p + \binom{p+1}{2} S_n^{p-1} + \cdots + \binom{p+1}{p} S_n^1 + S_n^0 = (n+1)^{p+1} - 1.$$

Für alle $q < p$ ist $S_n^q$ nach Induktionsannahme ein Polynom vom Grad kleiner gleich $q+1$. Insbesondere ist dann

$$f(n) = \binom{p+1}{2} S_n^{p-1} + \cdots + \binom{p+1}{p} S_n^1 + S_n^0$$

ein Polynom vom Grad kleiner gleich $p$. Wir erhalten also

$$(p+1)S_n^p = (n+1)^{p+1} - 1 - f(n) = n^{p+1} + (p+1)n^p + \ldots + (p+1)n - f(n)$$

und es folgt direkt die Behauptung.

**Bemerkung.** Es gilt

$$\begin{aligned}
(S_n^1)^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = (n + S_{n-1})^2 = n^2 + 2nS_{n-1}^1 + (S_{n-1}^1)^2 = n^2 + 2n\frac{n(n-1)}{2} + (S_{n-1}^1)^2 \\
&= n^3 + (S_{n-1}^1)^2,
\end{aligned}$$

und mit einer triviale Induktion beweisen wir dass $(S_n^1)^2 = S_n^3$.

## Aufgabe VII.

(a) Danke des Axioms $(K3)$ gilt für alle $x \in \mathbb{K}$ existiert $0_x \in \mathbb{K}$, so dass

$$0_x + x = x.$$

Sei $y \in \mathbb{K}$ und $(-x), (-y) \in \mathbb{K}$, so dass

$$y + (-y) = 0_x, \quad x + (-x) = 0_y.$$

Dann

$$0_x = y + (-y) = 0_y + y + (-y) = 0_y + 0_x = 0_x + 0_y$$

und

$$0_y = x + (-x) = 0_x + x + (-x) = 0_x + 0_y$$

also

$$0_x = 0_y = 0_x + 0_y.$$

und die Definition $N = 0_x$ (für irgendwelche $x \in \mathbb{K}$) ist eindeutig.

(b) Es gilt $Nx = N$ für alle $x \in \mathbb{K}$, weil $Nx = (N+N)x = Nx + Nx$. Dann

$$N = Nx + (-Nx) = Nx + Nx + (-Nx) = Nx + N = Nx.$$

Wenn $y \neq N$, ist die Gleichung $Nx = y$ nicht lösbar also $N = 0_{\mathbb{K}}$.

(c) Seien $x, y \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ und $1_x, 1_y \in \mathbb{K}$ so dass

$$1_x \cdot x = x, \quad 1_y \cdot y = y.$$

Wir definieren $x^{-1}, y^{-1} \in \mathbb{K}$, so dass

$$x^{-1} \cdot x = 1_y, \quad y^{-1} \cdot y = 1_x.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
1_x &= y^{-1} \cdot y = y^{-1} \cdot (1_y \cdot y) = (y^{-1} \cdot y) \cdot 1_y = 1_x \cdot 1_y \\
1_y &= x^{-1} \cdot x = 1_x \cdot 1_y
\end{aligned}$$

also

$$1_x = 1_y.$$

und die Definition $1_{\mathbb{K}} = 1_x$ (für irgendwelche $x \in \mathbb{K}$) ist eindeutig.

(d) Seien $a, b \in \mathbb{K}$ und $x, x' \in \mathbb{K}$, so dass

$$a + x = b, \quad a + x' = b.$$

Es gilt

$$x = x + 0_{\mathbb{K}} = (-a) + a + x = (-a) + b = x'$$

und die Multiplikation ist ähnlich.

(e) $\Longleftarrow$ : ist klar.
$\Longrightarrow$ : Falls $x = y = 0_{\mathbb{K}}$ dann ist die Lösung trivial. Falls $x \cdot y = 0$ mit $x \neq 0$, haben wir

$$y = 1_{\mathbb{K}} \cdot y = (x^{-1} \cdot x) \cdot y = x^{-1} \cdot (x \cdot y) = x^{-1} \cdot 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}},$$

und falls $y \neq 0$, so gilt auch $x = 0_{\mathbb{K}}$.