I.

Sei $\aleph_0 = \text{Kard}(\mathbb{N})$.

(a) Die Mengen A und B sind abzählbar also existiert einen injektiven Funktionen $f : A \to \mathbb{N}$ und $g : B \to \mathbb{N}$. Wir können anhemen dass $A \cap B = \varnothing$ weil $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ und $\text{Kard}(A \setminus B) \leq \text{Kard}(A)$ ist (da $A \setminus B \subset A \implies \text{Kard}(A \setminus B) \leq \text{Kard}(A) \leq \aleph_0$). Wir definieren eine Funktion $h : A \cup B \to \mathbb{N}$ so dass

$$h(x) = \begin{cases} 2f(x) & \text{falls } x \in A, \\ 2g(x) + 1 & \text{falls } x \in B. \end{cases}$$

Die Abbildung h ist bijektiv weil f und g bijektiv sind. (Falls $h(x) = h(y)$ mit $x \in A$ und $y \in B$, folglich gilt

$$2f(x) = 2g(y) + 1$$

aber das ist nicht möglich).

(b) Wir können auch beweisen dass $A_n \cap A_m = \varnothing$ für alle $n \neq m$ mit $n, m \in \mathbb{N}$. Zwar, für alle $n \in \mathbb{N}$, sei A'_n die Menge

$$A'_n = A_n \setminus \bigcup_{m \geq n+1} A_m.$$

Dann $A'_n \subset A_n$, also $\text{Kard}(A'_n) \leq \text{Kard}(A_n) \leq \aleph_0$. Offensichtlich gilt $A'_n \cap A'_m = \varnothing$ für alle $n \neq m$, (mit $n, m \in \mathbb{N}$) und

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Sei $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \cdots\}$ die *unendlich* Menge der Primzahlen, und für alle $n \in \mathbb{N}$, falls $A_n \neq \varnothing$, sei $f_n : A_n \to \mathbb{N}$ eine injektive Funktion. Wir definieren die Funktion f so dass

$$f : \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \to \mathbb{N}$$
$$x \mapsto p_n^{f_n(x)} \quad \text{falls } x \in A_n.$$

Wegen Euklid lemma, die Abbildung f injektiv ist, also

$$\text{Kard}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \aleph_0.$$

Bemerkung: Für alle Menge X, wir definieren

$$\text{Kard}(X) = |X| = (\text{Kardinalzahl}(X)).$$

II.

Es gilt

$$(a)\ \frac{4z^3 - 3z^2 - 49z - 36}{z+1} = 4z^2 - 7z - 42 + \frac{6}{z+1},$$
$$(b)\ \frac{z^4 + z^3 - 9z^2 - 9z + 1}{z+3} = z^3 - 2z^2 - 3z + \frac{1}{z+3}$$
$$(c)\ \frac{2z^5 + 3z^4 - 21z^3 - 37z^2 - 9z + 6}{z^2 - 2z - 3} = 2z^3 + 7z^2 - z - 18 - \frac{48}{z-3}$$
$$(d)\ \frac{2z^5 - 17z^4 + 48z^3 - 51z^2 + 12z}{z^2+1} = 2z^3 - 17z^2 + 46z - 34 - \frac{34(z-1)}{z^2+1}.$$

III.

Es gilt

$$(a)\ \frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}, \quad (b)\ \frac{z^4+1}{(z+3)(z-6)(z+5)} = z-2+\frac{1297}{99(z-6)} - \frac{41}{9(z+3)} + \frac{313}{11(z+5)},$$
$$(c)\ \frac{2z+3}{(z^2+4z+4)(z-1)} = -\frac{5}{9(z+2)} + \frac{1}{3(z+2)^2} + \frac{5}{9(z-1)},$$
$$(d)\ \frac{3z^2+1}{(z^2+1)(z+2)(z-3)} = -\frac{(z-7)}{25(z^2+1)} + \frac{14}{25(z-3)} - \frac{13}{25(z+2)}.$$

IV.

Bezeichne mit $\Delta(z_1,z_2,z_3)$ das Dreieck mit den Eckpunkten $z_1,z_2,z_3 \in \mathbb{C}$. Definiere

$$w_1 = z_1 - z_1 = 0, \qquad w_2 = z_2 - z_1, \qquad w_3 = z_3 - z_1.$$

Geometrisch erhalten wir $\Delta(0,w_2,w_3)$ durch Translation um z_1 aus $\Delta(z_1,z_2,z_3)$. Folglich ist $\Delta(0,w_2,w_3)$ ein gleichseitiges Dreieck genau dann, wenn $\Delta(z_1,z_2,z_3)$ ein gleichseitiges Dreieck ist. Definiere nun

$$u_1 = \frac{w_1}{w_2} = \frac{0}{w_2} = 0, \qquad u_2 = \frac{w_2}{w_2} = 1, \qquad u_3 = \frac{w_3}{w_2}.$$

Geometrisch erhalten wir $\Delta(0,1,u_3)$ durch ein Drehstreckung (die der Multiplikation mit w_2^{-1} entspricht) aus $\Delta(0,w_2,w_3)$. Somit ist $\Delta(0,1,u_3)$ ein gleichseitiges Dreieck genau dann, wenn $\Delta(0,w_2,w_3)$ ein gleichseitiges Dreieck ist, und das ist wiederum genau dann der Fall, wenn $\Delta(z_1,z_2,z_3)$ ein gleichseitiges Dreieck gilt.

Die Seite $[0,1]$ in $\Delta(0,1,u_3)$ hat die Länge 1 und die beiden anderen Seiten haben die Längen $|u_3|$ und $|u_3-1|$. Folglich ist $\Delta(0,1,u_3)$ ein gleichseitiges Dreieck, genau dann wenn $|u_3|^2 = 1 = |u_3-1|^2$ gilt. Schreibe $u_3 = a + \mathbf{i}b$ mit $a,b \in \mathbb{R}$, dann sind die Gleichungen äquivalent zu

$$a^2+b^2 = 1, \qquad 1 = (a-1)^2+b^2.$$

Insbesondere gilt $a^2 = (a-1)^2$ und somit $a = \frac{1}{2}$ und aus der ersten Gleichung folgt $b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Das Dreieck ist also genau dann gleichseitg, wenn $u_3 = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ gilt oder äquivalent falls u_3 die folgende Gleichung erfüllt:

$$0 = \left(u_3 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(u_3 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = u_3^2 - u_3 + 1.$$

Es bleibt zu zeigen, dass u_3 genau dann diese Gleichung erfüllt, wenn z_1,z_2,z_3 die Gleichung aus der Aufgabenstellung erfüllen:

$$\begin{aligned}
&1 + u_3^2 = u_3\\
&\Leftrightarrow \left(\frac{w_2}{w_2}\right)^2 + \left(\frac{w_3}{w_2}\right)^2 = \frac{w_3}{w_2}\\
&\Leftrightarrow w_2^2 + w_3^2 = w_3 w_2\\
&\Leftrightarrow (z_2-z_1)^2 + (z_3-z_1)^2 = (z_3-z_1)(z_2-z_1)\\
&\Leftrightarrow z_1^2 - 2z_1z_2 + z_2^2 + z_3^2 - 2z_3z_1 + z_1^2 = z_3z_2 - z_3z_1 - z_1z_2 + z_1^2\\
&\Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1
\end{aligned}$$

Das beweist die Behauptung.

V.

(a) Wir haben

$$Z_1 = i\omega L, \quad Z_2 = R$$

also

$$H(\omega) = \frac{U_{\text{out}}}{U_{\text{in}}} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{R}{R + i\omega L}$$

und

$$|H(\omega)| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}}.$$

(b) Wir haben

$$Z_1 = i\omega L$$

und dank Kirchhoffsche Gesetz gilt

$$\frac{1}{Z_2} = \frac{1}{\frac{1}{i\omega C}} + \frac{1}{R} = \frac{1}{R} + i\omega C$$

also

$$Z_2 = \frac{R}{1 + i\omega RC}.$$

Dann

$$H(\omega) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{1}{1 + \frac{Z_1}{Z_2}} = \left(1 + i\frac{\omega L}{R} - \omega^2 LC\right)^{-1} = \frac{1}{(1 - LC\omega^2) + i\omega\frac{L}{R}}$$

also gilt

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}}.$$

VI.

Die Inversion (mit Mittelpunkt $0 \in \mathbb{R}^2$ und Radius 1) ist die Abbildung $i : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$,

$$i_0(x) = \frac{x}{|x|^2} = \left(\frac{x_1}{|x|^2}, \frac{x_2}{|x|^2}\right).$$

Wie die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} l : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{C} \\ (x_1, x_2) &\mapsto x_1 + ix_2 \end{aligned}$$

bijektiv ist, können wir identifizieren $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$. Sei $i = l \circ i_0 \circ l^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann für alle $z \in \mathbb{C}$, wir haben

$$i(z) = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{\overline{z}}$$

also die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} \setminus \{0\} &\to \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ z &\mapsto \frac{1}{z} \end{aligned}$$

ist die Komposition von i und die komplexe Konjugation $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \overline{z}$.