I.

Wir haben

$$R(z) = \frac{4z^3 - 4z^2 + z - 1}{(z^2-1)^2(z^2-4z+4)} = \frac{4z^2+1}{(z-1)(z+1)^2(z-2)^2}$$

weil $4z^3 - 4z^2 + z - 1 = (z-1)(4z^2+1)$ ist (1 ist eine triviale Nullstelle). Also sind die Pole 1 (der Ordnung 1), -1 (der Ordnung 2) und 2 (der Ordnung 2). Die Partialbruchzerlegung ist

$$R(z) = \frac{5}{4(z-1)} - \frac{37}{27(z-2)} + \frac{17}{9(z-2)^2} + \frac{13}{108(z+1)} - \frac{5}{18(z+1)^2}.$$

II.

Seien $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, und $\alpha_m, \beta_m, a_{m,k}, b_{m,k} \in \mathbb{C}$, so dass

$$R(z) = \sum_k \sum_m \frac{a_{m,k}}{(z-\alpha_m)^k} + P(z) = \sum_k \sum_m \frac{b_{m,k}}{(z-\beta_m)^k} + Q(z). \tag{1}$$

Fall $P = 0$.

Wir haben

$$\lim_{|z|\to\infty} |R(z)| = 0. \tag{2}$$

Für alle $Q \in \mathbb{C}[z]$ mit $Q \neq 0$, gilt

$$\lim_{|z|\to\infty} |Q(z)| = \begin{cases} \infty, & \text{falls } \deg(Q) > 0 \\ |Q| \neq 0, & \text{falls } \deg(Q) = 0 \text{ (da } Q \text{ konstant ist).} \end{cases}$$

Also ist

$$\lim_{|z|\to\infty} |R(z)| = \lim_{|z|\to\infty} \left| \sum_{k,m} \frac{b_{m,k}}{(z-\beta_m)^k} + Q(z) \right| = \lim_{|z|\to\infty} |Q(z)| \neq 0. \tag{3}$$

aber (3) ist nicht möglich, denn es widerspricht (2). Somit gilt $Q = 0$, wenn $P = 0$.

Fall $P \neq 0$.

Schreiben wir

$$P(z) = \sum_{j=0}^{n} c_j z^j, \quad Q(z) = \sum_{k=0}^{m} d_k z^k,$$

mit $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $c_j, d_k \in \mathbb{C}$ und $c_n \neq 0$, $d_m \neq 0$. Wir haben wegen (1)

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{R(z)}{z^n} = c_n = \lim_{|z|\to\infty} \frac{Q(z)}{z^n}.$$

Also

$$\lim_{|z|\to\infty} \left| \frac{Q(z)}{z^n} - c_n \right| = 0. \tag{4}$$

Es gilt

$$\lim_{|z|\to\infty} \left| \frac{Q(z)}{z^n} - c_n \right| = \lim_{|z|\to\infty} \left| \sum_{j=0}^{m} d_j z^{j-n} - c_n \right| = \begin{cases} \infty, & \text{falls } m > n \\ |d_m - c_n|, & \text{falls } m = n \\ |c_n| \neq 0, & \text{falls } m < n. \end{cases} \tag{5}$$

Folglich, gelten $m = n$ und $c_n = d_m$ wegen (4) und (5). Mit einem trivialen Induktionsargument beweist man, dass $c_j = d_j$ für alle $0 \leq j \leq n$ also $P = Q$. Also können wir annehmen dass $P = 0$ in (1) ist.

Seien $a, b \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{Z}$. Es gilt

$$\lim_{z \to a} \left| \frac{(z-a)^k}{(z-b)^l} \right| = \begin{cases} 1, & \text{falls } a = b, \text{ und } k = l \\ \infty & \text{falls } a = b, \text{ und } k < l \\ 0 & \text{falls } a \neq b, \text{ oder } k > l. \end{cases} \tag{6}$$

Sei $m_0 \in \mathbb{N}$ so dass $a_{m_0,k} \neq 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Es existiert $N = N(m_0)$ so dass

$$R(z) = \sum_k \sum_{m \neq m_0} \frac{a_{m,k}}{(z-\alpha_m)^k} + \sum_{k=1}^{N} \frac{a_{m_0,k}}{(z-\alpha_{m_0})^k}$$

mit $a_{m_0,N} \neq 0$. Es gilt wegen (6)

$$\lim_{z \to \alpha_m} (z-\alpha_m)^N R(z) = a_{m_0,N}$$

und aus (6), folgt

$$b_{m_0,N} = a_{m_0,N}.$$

Der Abschluss folgt wieder mittels Induktion.

III.

Wir setzen einige Grenzwerte aus der Vorlesung als bekannt voraus. Diese sind aufgelistet und bewiesen im Königsberger, Kapitel 5.1: *Wichtige Folgen und Grenzwerte.*

(a) Da der Limes mit Addition und Division vertauscht werden kann, gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+5n}{3n^2-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{5}{n}}{3-\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{3}$$

(b) Die Folge divergiert, da $|a_n - a_{n+1}| = 2n+1$. Genau genommen zeigt dieses Argument, dass die Folge keine Cauchy-Folge ist. In der Vorlesungen haben wir aber gesehen, dass jede konvergente Folge Cauchy ist.

(c) Wir erweitern mit der dritten binomischen Formel und erhalten:

$$0 \leq a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

(d) Durch Vertauschen des Limes mit dem Produkt erhalten wir

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}\frac{1}{2^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}}{k!}\cdot\frac{n^k}{2^n} \\ &= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!}\right)\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{2^n}\right) \\ &= \frac{1}{k!}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{2^n}\right) = 0 \end{aligned}$$

Den letzten Grenzwert setzen wir als bekannt voraus.

(e) Da $\left|\frac{3+4i}{5}\right| = 1$ erhalten wir

$$|a_{n+1}-a_n| = \left|\left(\frac{3+4i}{5}\right)^n\left(\frac{3+4i}{5}-1\right)\right| = \left|\frac{3+4i}{5}-1\right| = \frac{1}{5}\sqrt{20}.$$

Wie in Teil (b) sehen wir also, dass die Folge nicht Cauchy ist und somit nicht konvergieren kann.

(f) Wir schätzen ab
$$5 = \sqrt[n]{5^n} \leq a_n = \sqrt[n]{3^n + 4^n + 5^n} \leq \sqrt[n]{3 \cdot 5^n} = \sqrt[n]{3} \cdot 5$$
Da $\sqrt[n]{3}$ gegen 1 konvergiert, folgt sofort, dass a_n gegen 5 konvergiert.

(g) Wir schätzen ab
$$1 \leq a_n = \sqrt[n]{7n^6 + 2n^2 + 1} \leq \sqrt[n]{10n^6} = \sqrt[n]{10} \cdot \left(\sqrt[n]{n}\right)^6$$
Somit konvergiert a_n gegen 1, da sowohl $\sqrt[n]{10}$ als auch $\sqrt[n]{n}$ gegen 1 konvergieren,

(h) Wir verwenden, dass $\frac{n^{2017}}{2^n}$ gegen 0 konvergiert um den Limes zu berechnen:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - n^{2017}}{2^n + n^{2017}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{n^{2017}}{2^n}}{1 + \frac{n^{2017}}{2^n}} = 1.$$

IV.

Mit der dritten binomischen Formel folgt
$$\frac{\sqrt{1+a_n} - 1}{a_n} = \frac{1 + a_n - 1}{a_n(\sqrt{1+a_n} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{1+a_n} + 1}.$$
Da $a_n \to 0$ für $n \to \infty$, konvergiert der Ausdruck rechts gegen $\frac{1}{2}$ und damit folgt die Behauptung.

V.

(a) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert, gibt es $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, sodass
$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n > N(\varepsilon).$$
Definiere
$$M(\varepsilon) = \max_{1\leq k\leq N(\varepsilon)} |a_k - a|$$
Dann erhalten wir für $n > N(\varepsilon)$:
$$|s_n - a| \leq \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} (a_k - a) \right| + \left| \frac{1}{n} \sum_{k=N_\varepsilon+1}^{n} (a_k - a) \right| \leq \frac{N(\varepsilon)}{n} \cdot M(\varepsilon) + \frac{n - N_\varepsilon}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2}$$
Aus dieser Abschätzung folgt sofort
$$\limsup_{n\to\infty} |s_n - a| \leq \left(\lim_{n\to\infty} \frac{N(\varepsilon) M(\varepsilon)}{n} \right) + \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n - N(\varepsilon)}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \right) = \frac{\varepsilon}{2}$$
Insbesondere gibt es $N'(\varepsilon) > N(\varepsilon)$, sodass
$$|s_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n > N'(\varepsilon).$$
Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, beweist dies die Konvergenz von s_n gegen a.

(b) Betrachte als Beispiel $a_n = (-1)^n$. Dann gilt
$$s_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k = \begin{cases} -\dfrac{1}{n} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$
Insbesondere gilt $|s_n| \leq \dfrac{1}{n}$ und folglich konvergiert s_n gegen 0.

VI.

(a) Sei $P(z) = z^4 + 1$. Das Polynom P hat keine reelle Nullstellen, da $P(x) \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist. Die Gleichung $P(z) = 0$ gilt genau dann, wenn

$$z^4 = -1 = e^{i\pi} \Leftrightarrow z = e^{\frac{i\pi}{4}} e^{\frac{2ik\pi}{4}}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Also sind die Nullstellen von P

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} P(z) &= \left(z - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\left(z - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\left(z - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\left(z - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) \\ &= (z^2 - \sqrt{2}z + 1)(z^2 + \sqrt{2}z + 1), \end{aligned}$$

und folglich ist

$$R(z) = \frac{z^2+1}{z^4+1} = \frac{z^2+1}{(z^2 - \sqrt{2}z + 1)(z^2 + \sqrt{2}z + 1)} = \frac{1}{2(z^2 - \sqrt{2}z + 1)} + \frac{1}{2(z^2 + \sqrt{2}z + 1)}.$$

(b) Sei R eine reelle rationale Funktion. Seien $P \in \mathbb{C}[z]$, $\alpha_m \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ und $c_0, \cdots, c_n \in \mathbb{C}$, so dass

$$R(z) = \sum_{k,m} \frac{a_{m,k}}{(z - \alpha_m)^k} + P(z). \tag{7}$$

mit

$$P(z) = \sum_{j=0}^{n} c_j z^j$$

Die rationale Funktion R ist reel. Dann gilt $R(x) = \overline{R(x)}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, oder

$$\sum_{k,m} \frac{a_{m,k}}{(x - \alpha_m)^k} + \sum_{j=0}^{n} c_j x^j = \sum_{k,m} \frac{\overline{a_{m,k}}}{(x - \overline{\alpha}_m)^k} + \sum_{j=0}^{n} \overline{c_j} x^j. \tag{8}$$

Wegen Aufgabe **III.**, ist die Partialbruchzerlegung von R eindeutig. Also gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{j=0}^{n} c_j x^j = \sum_{j=0}^{n} \overline{c_j} x^j \implies c_j = \overline{c_j} \text{ für alle } j = 0, \cdots, n.$$

Es folgt, dass P ein reelles Polynom ist. Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$R(x) = \frac{1}{2}\left(R(x) + \overline{R(x)}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k,m} \underbrace{\left(\frac{a_{m,k}}{(x - \alpha_m)^k} + \frac{\overline{a_{m,k}}}{(x - \overline{\alpha_m})^k}\right)}_{\in\mathbb{R}} + P(x) \tag{9}$$

Falls $\alpha_m \in \mathbb{R}$, ist die rationale Funktion

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a_{m,k}}{(x - \alpha_m)^k} + \frac{\overline{a_{m,k}}}{(x - \overline{\alpha_m})^k}\right) = \frac{\mathrm{Re}\,(a_{m,k})}{(x - \alpha_m)^k} \tag{10}$$

reell.

Falls $\alpha_m \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a_{m,k}}{(x - \alpha_m)^k} + \frac{\overline{a_{m,k}}}{(x - \overline{\alpha_m})^k}\right) = \frac{\mathrm{Re}\,(a_{m,k}(x - \overline{\alpha}_m)^k)}{(x^2 - 2\mathrm{Re}\,(\alpha_m)x + |\alpha_m|^2)^k} = \left(\frac{\mathrm{Re}\,(a_{m,k}^{\frac{1}{k}})x - \mathrm{Re}\,(a_{m,k}^{\frac{1}{k}}\overline{\alpha_m})}{x^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(\alpha_m)x + |\alpha_m|^2}\right)^k \tag{11}$$

und das Polynom $x^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(\alpha_m)x + |\alpha_m|^2$ hat keine reelle Nullstelle, weil

$$\Delta = 4\left(\mathrm{Re}\,(\alpha_m)^2 - |\alpha_m|^2\right) = -4\,\mathrm{Im}\,(\alpha_m)^2 < 0 \quad (\text{da } \alpha_m \notin \mathbb{R})$$

ist. Beweisen wir mit vollständiger Induktion dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a, b, c \in \mathbb{R}$ es existieren $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ so dass

$$\left(\frac{x+c}{x^2+ax+b}\right)^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k x + \beta_k}{(x^2+ax+b)^k}. \tag{12}$$

Für $n = 1$ gilt die Behauptung mit $\alpha_1 = 1$ und $\beta_1 = c$.

Induktionsschluss. Es gilt für einige $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ (mit $1 \leq k \leq n$)

$$\begin{aligned}\left(\frac{x+c}{x^2+ax+b}\right)^{n+1} &= \frac{x+c}{x^2+ax+b} \cdot \left(\frac{x+c}{x^2+ax+b}\right)^n = \frac{x+c}{x^2+ax+b}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k x + \beta_k}{(x^2+ax+b)^k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k x^2 + (c\alpha_k + \beta_k)x + c\beta_k}{(x^2+ax+b)^{k+1}} \end{aligned} \tag{13}$$

Sei $k \in \{1, \cdots, n\}$. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_k x^2 + (c\alpha_k + \beta_k)x + c\beta_k}{(x^2+ax+b)^{k+1}} &= \frac{\alpha_k(x^2+ax+b) + \left((c-a)\alpha_k + \beta_k\right)x + c\beta_k - b\alpha_k}{(x^2+ax+b)^{k+1}} \\ &= \frac{\alpha_k}{(x^2+ax+b)^k} + \frac{\left((c-a)\alpha_k + \beta_k\right)x + c\beta_k - b\alpha_k}{(x^2+ax+b)^{k+1}}. \end{aligned} \tag{14}$$

Also wir haben wegen (13) und (14)

$$\begin{aligned}&\left(\frac{x+c}{x^2+ax+b}\right)^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k x^2 + (c\alpha_k + \beta_k)x + c\beta_k}{(x^2+ax+b)^{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\alpha_k}{(x^2+ax+b)^k} + \frac{\left((c-a)\alpha_k + \beta_k\right)x + c\beta_k - b\alpha_k}{(x^2+ax+b)^{k+1}}\right) \\ &= \frac{\alpha_1}{x^2+ax+b} + \sum_{k=2}^{n} \frac{((c-a)\alpha_{k-1} + \beta_{k-1})x + c\beta_{k-1} - b\alpha_{k-1} + \alpha_k}{(x^2+ax+b)^k} + \frac{((c-a)\alpha_n + \beta_n)x + c\beta_n - b\alpha_n}{(x^2+ax+b)^{n+1}}.\end{aligned}$$

Der Abschluss folgt dank (9), (10), (11) und (12).