I. Substitution

Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ die offene Menge

$$U = \mathbb{R}^2 \cap \left\{ (x,y),\ y > 1, x > \max\left\{ y, \frac{y}{y-1} \right\} \right\}.$$

1. Bezeichnen Sie der Laplace-Operator $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ über U in die neuen Koordinaten

$$\begin{cases} u = xy \\ v = x + y \end{cases} \tag{1}$$

2. Sei $f : U \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto e^{xy} \log(xy - x - y)$. Zeigen sie dass f zweimal differenzierbare ist und bestimmen Sie Δf in U.

Lösung:

1. Wir haben wegen (1) $y = v - x$ und $u = xy = x(v - x)$, oder

$$x^2 - vx + u = 0$$

Da $x > y$ gilt auch $2xy < x^2 + y^2$, oder $v^2 > 4u$, und gilt

$$x = \frac{1}{2}\left(v \pm \sqrt{v^2 - 4u} \right)$$

und $x > y$, also

$$x = \frac{1}{2}\left(v + \sqrt{v^2 - 4u} \right), \quad y = v - x = \frac{1}{2}\left(v - \sqrt{v^2 - 4u} \right).$$

Es folgt

$$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v} = y\,\partial_u + \partial_v = \frac{1}{2}\left(v - \sqrt{v^2 - 4u} \right)\partial_u + \partial_v$$

und $\partial_x y = 0$ also gilt auch $(y\partial_u + \partial_v)y = 0$. Dann gilt

$$\partial_x^2 = y^2 \partial_u^2 + 2y\partial_{uv}^2 + \partial_v^2 + (y\partial_u + \partial_v)y\,\partial_u = y^2 \partial u^2 + 2y\,\partial_{uv}^2 + \partial_v^2$$

und

$$\begin{aligned} \partial_y &= x\,\partial_u + \partial_v = \frac{1}{2}\left(v + \sqrt{v^2 - 4u} \right)\partial_u + \partial_v \\ \partial_y^2 &= x^2 \partial_u^2 + 2x\,\partial_{uv}^2 \end{aligned}$$

Da $(a - b)^2 + (a + b)^2 = 2a^2 + 2b^2$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ folgt

$$\begin{aligned} \Delta u &= (x^2 + y^2)\partial_u^2 + 2(x + y)\partial_{uv}^2 + 2\,\partial_v^2 = ((x + y)^2 - 2xy)\partial_u^2 + 2\,v\partial_{uv}^2 + 2\,\partial_v^2 \\ &= (v^2 - 2u)\partial_u^2 + 2v\,\partial_{uv}^2 + 2\,\partial_v^2. \end{aligned}$$

2. Wegen die Kettenregel ist die Funktion f zweimal differenzierbare, da $U \to \mathbb{R}_+^*, (x,y) \mapsto xy - x - y$, $U \to \mathbb{R}, x \mapsto xy$, exp und log glatt auf ihrem Definitionsmenge sind. Haben wir $f(u,v) = e^u \log(u - v)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \partial_u f &= e^u \log(u - v) + \frac{e^u}{u - v} \\ \partial_u^2 f &= e^u \log(u - v) + 2\frac{e^u}{u - v} - \frac{e^u}{(u - v)^2} \\ \partial_{uv}^2 f &= -\frac{e^u}{u - v} + \frac{e^u}{(u - v)^2} \\ \partial_v f &= -\frac{e^u}{u - v} \end{aligned}$$

$$\partial_v^2 f = -\frac{e^u}{(u-v)^2}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\Delta f &= \left((v^2-2u)\log(u-v) + \frac{2(v^2-2u)}{u-v} - \frac{v^2-2u}{(u-v)^2} - \frac{2v}{u-v} + \frac{2v}{(u-v)^2} - \frac{2}{(u-v)^2}\right)e^u \\ &= \left(\left(x^2+y^2\right)\log(xy-x-y) + \frac{2(x^2+y^2-x-y)}{xy-x-y} + \frac{2(x+y-1)-(x^2+y^2)}{(xy-x-y)^2}\right)e^{xy}.\end{aligned}$$

II. Die Geometrie des Gradientes Sei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante und sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nichtkonstant und differenzierbar. Nehmen Sie an, dass die Gleichung $f(x,y) = c$ eine Kurve C in der Ebene $\mathbb{R}^2$ definiert. Das heisst, es gibt ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und eine differenzierbare Abbildung $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, so dass

$$\gamma(I) = C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = c\} \tag{2}$$

und $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. ∇f steht senkrecht zu C. Dass heisst, für jede $t \in I$ ist $\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$.
2. Die Richtungsableitung von f in Richtung C verschwindet. Dass heisst, $D_{\gamma'(t)} f(\gamma(t)) = 0$ für alle $t \in I$.
3. Die Richtungsableitung von f ist am grössten in einer Richtung senkrecht zu C.

Lösung:

1. Wegen (2) ist die Komposition $I \ni t \mapsto f \circ \gamma(t)$ eine konstante Funktion. Somit ist $\frac{d}{dt} f \circ \gamma(t) = 0$. Wir wenden nun die Kettenregel an:

   $$0 = \frac{d}{dt} f \circ \gamma(t) = df(\gamma(t))\gamma'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t), \quad \forall\, t \in I.$$

   Das heisst genau, dass ∇f senkrecht zu C steht.

2. Da f differenzierbar ist haben wir

   $$D_{\gamma'(t)} f(\gamma(t)) = df(\gamma(t))\gamma'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0,$$

   wo wir a) benutzen.

3. Sei $t \in I$ und sei $v \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v\| = 1$. Sei auch n ein Vektor mit $\|\mathsf{n}\| = 1$ und $\mathsf{n} \cdot \gamma'(t) = 0$. Also, n ist einen Normalenvektor zu C im Punkt $\gamma(t) \in C$. Nun bildet $\{\gamma'(t), \mathsf{n}\}$ eine Basis für $\mathbb{R}^2$ und somit gibt es $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass

   $$v = a\gamma'(t) + b\mathsf{n}.$$

   Da $\gamma'(t) \perp \mathsf{n}$, gibt Pythagoras $1 = |v| = |a||\gamma'(t)| + |b||\mathsf{n}| = |a||\gamma'(t)| + |b|$, und somit ist $|b| \leq 1$ mit $|b| = 1$ genau dann, wenn $v = \pm\mathsf{n}$. Da auch $\nabla f(\gamma(t)) \perp \gamma'(t)$, haben wir nun

   $$\begin{aligned}D_v f(\gamma(t)) &= \nabla f(\gamma(t)) \cdot v = \nabla f(\gamma(t)) \cdot (a\gamma'(t) + b\mathsf{n}) \\ &= b\nabla f(\gamma(t)) \cdot \mathsf{n} = bD_{\mathsf{n}} f(\gamma(t)) \leq \max\{D_{\mathsf{n}} f(\gamma(t)), D_{-\mathsf{n}} f(\gamma(t))\}.\end{aligned}$$

   Dies zeigt die Behauptung.

III. Tangentialebenen Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = \sin(x) - y^3 + y^2$$

gegeben.

1. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene von der Fläche

   $$\mathcal{G}(f) = \{(x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3$$

   im Punkt $(0,3,f(0,3)) = (0,3,-18)$.

2. Bestimmen Sie eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so dass der Vektor

$$\begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

senkrecht zur Fläche $\mathcal{G}(f)$ am Punkt $(\frac{\pi}{2}, 0, 0) \in \mathcal{G}(f)$ steht.

Lösung:

1. Zunächst berechnen wir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(x), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -3y^2 + 2y \tag{3}$$

und somit haben wir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,3) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,3) = -3 \cdot 9 + 2 \cdot 3 = 3(2-9) = -21.$$

Eine Parametrisierung der Fläche $\mathcal{G}(f)$ ist durch $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$F(x,y) = (x, y, f(x,y))$$

gegeben. Somit ist eine Basis der Tangentialebene von $\mathcal{G}(f)$ im Punkt $(0,3,-18)$ durch

$$v := dF(0,3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ u := dF(0,3)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Das Differential $dF(0,3)$ können wir nun berechnen:

$$dF(0,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,3) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -21 \end{pmatrix}.$$

Wir haben also

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -21 \end{pmatrix} \Rightarrow v \times u = \begin{pmatrix} -1 \\ 21 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das heisst, ein Punkt $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ liegt in der gesuchten Ebene genau dann, wenn

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -18 \end{pmatrix} + w$$

wobei w die Bedingung $w \cdot (v \times u) = 0$ erfüllt. Also genau dann, wenn

$$0 = (v \times u) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y-3 \\ z+18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 21 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y-3 \\ z+18 \end{pmatrix} = -x + 21y - 3 \cdot 21 + z + 18.$$

Somit ist die Gleichung der Tangentialebene

$$-x + 21y + z = 45.$$

2. Aus (3) folgt, dass

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\tfrac{\pi}{2}, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\tfrac{\pi}{2}, 0) = 0$$

und somit folgt, wie in a), dass eine Basis der Tangentialebene von $\mathcal{G}(f)$ in $(\frac{\pi}{2}, 0, 0)$ durch

$$v := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ u := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Da

$$v \times u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

senkrecht zur Fläche $\mathcal{G}(f)$ im Punkt $(\frac{\pi}{2}, 0, 0)$ steht, folgt dass $c = 0$.