I.

(a) Wir haben für alle $n \in \mathbb{N}$

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}. \tag{1}$$

(b) Die Folge $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht, weil

$$\liminf_{n\to\infty} |H_{2n} - H_n| = \liminf_{n\to\infty} (H_{2n} - H_n) \geq \frac{1}{2} > 0$$

ist. Da die Folge $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend ist, folglich gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Variante. Wegen (1) gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$H_{2^n} - H_{2^{n-1}} = H_{2\cdot 2^{n-1}} - H_{2^{n-1}} \geq \frac{1}{2}.$$

Folglich gilt

$$H_{2^n} - 1 = H_{2^n} - H_{2^0} = \sum_{k=1}^{n} (H_{2^k} - H_{2^{k-1}}) \geq \frac{n}{2}$$

also

$$H_{2^n} \geq \frac{n}{2} + 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

II.

(a) Sei $a_n = \dfrac{n+1}{n}$. Wir haben

$$a_n = 1 + \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

also divergiert die Reihe $\sum a_n$.

(b) Sei $a_n = \dfrac{n - \sqrt{n}}{(n+\sqrt{n})^2}$. Wir haben

$$a_n = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-2} \geq \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(1+1)^{-2} = \frac{\sqrt{2}-1}{4}\frac{1}{n} \tag{2}$$

für alle $n \geq 2$. Aber wegen Aufgabe **I.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

also dank (2) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty.$$

(c) Wir haben für alle $n \in \mathbb{N}$

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k \leq \prod_{k=1}^{n} n = n^n \tag{3}$$

und die Funktion $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, x \mapsto \sqrt[n]{x}$ ist monoton steigend , also gilt wegen (3)

$$\sqrt[n]{n!} \leq n \implies \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \geq \frac{1}{n}.$$

Damit folgt direkt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = \infty.$$

(d) Sei $a_n = \dfrac{(-1)^n + i^n}{(3i)^n - 2^n}$. Wir haben für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n| \leq \frac{2}{3^n - 2^n} = \frac{2}{3^n}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)^{-1} \leq \frac{2}{3^{n-1}}. \tag{4}$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ also konvergiert die Reihe $\sum a_n$ wegen (4).

(e) Wir haben

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{1}{2} \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = \frac{1}{2} < 1$$

also konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

(f) Definiere $a_n = \dbinom{2n}{n} 3^{-n}$, dann gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{3(n+1)^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{4}{3} > 1.$$

und die Reihe divergiert nach dem Quotientenkriterium.

(g) Sei $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2n-1}}$. Die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\to \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \end{aligned}$$

ist monoton steigend, und für alle $n \in \mathbb{N}$, haben wir die Gleichung $a_n = (-1)^{k-1} f(n)$. Wegen des Leibniz Kriteriums (siehe Aufgabe **VI.**) konvergiert die Reihe $\sum a_n$.

(h) Definiere $a_n = \dfrac{n^a}{n!}$. Die Reihe konvergiert nach dem Quotientenkriterium, da

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^a}{(n+1)!} \frac{n!}{n^a} = \frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^a \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(i) Sei $a_n = \dfrac{1}{n + \sqrt{n}}$. Wir haben

$$a_n = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-1} \geq \frac{1}{2n}$$

also divergiert die Reihe $\sum a_n$.

III.

(a) Da die Reihen absolut konvergieren, können wir die Summationsreihenfolge beliebig verändern. Es folgt

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{(2n)^2}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\\ &= \zeta(2)-\frac{1}{4}\zeta(2)=\frac{3}{4}\zeta(2)\end{aligned}$$

(b) Wir berechnen zunächst die Partialbruchzerlegung der Summanden und machen den Ansatz:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}+\frac{c}{n+1}.$$

Indem wir mit allen Nennern durchmultiplizieren erhalten wir

$$\frac{(a+b+c)n^2+(3a+2b+c)n+2a}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Somit sind die Koeffizienten a, b, c durch das lineare Gleichungssystem

$$a+b+c=0, \qquad 3a+2b+c=0, \qquad 2a=1$$

bestimmt und wir erhalten $a=\frac{1}{2}$, $b=-1$ sowie $c=\frac{1}{2}$. Mit dieser PBZ berechnen wir

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1/2}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1/2}{n+2}\right)=\frac{1/2}{1}-\frac{1/2}{2}-\frac{1/2}{N+1}+\frac{1/2}{N+2}.$$

Dies folgt leicht mit vollständiger Induktion, da sich aufeinander folgende Terme sukzessiv aufheben. Wir erhalten damit

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2(N+1)}+\frac{1}{2(N+2)}\right)=\frac{1}{4}$$

(c) Wir bemerken zunächst:

$$\frac{1}{f_nf_{n+2}}=\frac{f_{n+1}}{f_nf_{n+1}f_{n+2}}=\frac{f_{n+2}-f_n}{f_nf_{n+1}f_{n+2}}=\frac{1}{f_nf_{n+1}}-\frac{1}{f_{n+1}f_{n+2}}$$

Damit folgt

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{f_nf_{n+2}}=\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{f_nf_{n+1}}-\frac{1}{f_{n+1}f_{n+2}}\right)=1-\frac{1}{f_{N+1}f_{N+2}}$$

und somit

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{f_nf_{n+2}}=\lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{1}{f_{N+1}f_{N+2}}\right)=1.$$

IV.

(a) Der Konvergenzradius ist mit dem Quotientenkriterium gegeben durch den Grenzwert

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{f_n}{f_{n+1}}=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n}\right)^{-1}$$

Wir haben in Serie 5, Aufgabe 3 gesehen, dass f_{n+1}/f_n gegen den goldene Schnitt φ konvergiert, d.h.

$$\rho = \varphi^{-1} = \varphi - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Da die Potenzreihe für $|z| < \rho$ absolut konvergiert, können wir die Reihenfolge der Summation beliebig vertauschen und erhalten:

$$\begin{aligned}
(1-z-z^2)f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{n+2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n - \sum_{n=1}^{\infty} f_{n-1} z^n - \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} z^n \\
&= f_0 + f_1 z - f_0 z + \sum_{n=2}^{\infty} (f_n - f_{n-1} - f_{n-2}) z^n \\
&= 1 + z - z + 0 = 1
\end{aligned}$$

(b) Mit dem goldenen Schnitt $\varphi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$, können wir die Fibonacci Zahlen explizit schreiben als

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^{n+1} - (-\varphi^{-1})^{n+1} \right).$$

Für $|z| < \rho = \varphi^{-1}$ konvergiert die Reihe absolut und wir berechnen mit der Formel für die geometrische Reihe

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^{n+1} - (-\varphi^{-1})^{n+1} \right) z^n \\
&= \frac{\varphi}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi z)^n + \frac{\varphi^{-1}}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} (-\varphi^{-1} z)^n \\
&= \frac{\varphi}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1-\varphi z} + \frac{\varphi^{-1}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1+\varphi^{-1} z} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{\varphi^{-1} - z} + \frac{1}{\varphi + z} \right) \\
&= \frac{\varphi + \varphi^{-1}}{\sqrt{5}(-z^2 + (\varphi^{-1} - \varphi) z + 1)} \\
&= \frac{-1}{z^2 - z - 1}
\end{aligned}$$

V.

(a) Durch Vertauschen der Summationsreihenfolge erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) b_k &= \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} b_k - \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \\
&= a_{n+1} b_{n+1} - a_1 b_1 + \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} b_k - \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} b_{k+1} \\
&= a_{n+1} b_{n+1} - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} (b_{k+1} - b_k)
\end{aligned}$$

(a) Der Konvergenzradius ρ ist nach dem Quotientenkriterium gegeben durch

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Folglich konvergiert die Potenzreihe absolut in dem Einheitskreis $\{|z| < 1\}$ und divergiert auf $\{|z| > 1\}$. Über das Konvergenzverhalten auf der Kreislinie $\{|z| = 1\}$ trifft das Quotientenkriterium keine Aussage.

Sei nun $|z| = 1$. Für $z = 1$ erhalten wir die harmonische Reihe, die bekanntlich divergiert. Für $z = -1$ erhalten wir die alternierende harmonische Reihe, welche nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert. Wir wollen zeigen, dass die Reihe für alle $z \neq 1$ mit $|z| = 1$ konvergiert. Dazu verwenden wir die partielle Summationsregel aus (a) mit

$$a_k = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{k-1} = \frac{1 - z^k}{1 - z}, \qquad b_k = \frac{1}{k}$$

Dann gilt $a_{k+1} - a_k = z^k$ und wir erhalten

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} - 1 - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right) \frac{1 - z^k}{1 - z}. \tag{5}$$

Wir müssen zeigen, dass die rechte Seite für $n \to \infty$ konvergiert. Die Terme vor der Summe konvergieren offenbar gegen -1, da

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{1}{n+1} \cdot \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} \right| \leq \frac{2}{|z - 1|} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Hierbei haben wir $|z^{n+1}| = |z|^{n+1} = 1$ und $z \neq 1$ benutzt. Die Reihe auf der rechten Seite konvergiert sogar absolut, denn es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right) \frac{1 - z^k}{1 - z} \right| \leq \frac{2}{|z - 1|} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{2}{|z - 1|}$$

Insbesondere konvergiert die rechte Seite in (5) mit $|z| = 1$, $z \neq 1$ für $n \to \infty$ und das zeigt die Behauptung.

VI.

(a) Die Folge $(s_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ der linken Randpunkte wächst monoton, da

$$s_{2n+1} - s_{2n-1} = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k a_k - \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k a_k = a_{2n} - a_{2n+1} \geq 0.$$

Hier benutzen wir, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fällt. Analog zeigt man, dass die Folge $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ der rechten Randpunkte monoton fällt, da

$$s_{2n+2} - s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k a_k - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k a_k = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0.$$

Es folgt $I_n := [s_{2n-1}, s_{2n}] \subset [s_{2n+1}, s_{2n+2}] =: I_{n+1}$. Schliesslich erhalten wir aus $|I_n| = s_{2n} - s_{2n-1} = a_{2n} > 0$ noch

$$\lim_{n \to \infty} |I_n| = \lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

und somit bilden die Intervalle I_n eine Intervallschachtelung.

(b) Sei nun $s \in \mathbb{R}$ die eindeutig bestimmte Zahl, sodass $s \in I_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt. Für $n = 2k - 1$ folgt aus $s \in I_k = [s_{2k-1}, s_{2k}]$ sofort $|s - s_{2k-1}| \leq |I_k| = a_{2k}$. Für $n = 2k$ folgt aus $s \in I_{k+1} = [s_{2k+1}, s_{2k+2}] \supset [s_{2k+1}, s_{2k}]$ sofort $|s - s_{2k}| \leq s_{2k} - s_{2k+1} = a_{2k+1}$. Wir haben also $|s - s_n| < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gezeigt. Da $a_n \to 0$ für $n \to \infty$, folgt, dass s_n gegen s konvergiert und somit

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k =: \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k.$$

(c) Sei nun $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch $a_{2n} = \dfrac{1}{n}$ und $a_{2n+1} = \dfrac{1}{2^n}$. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \geq \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) - 1$$

und die rechte Seite divergiert gegen $+\infty$ für $n \to \infty$, da die harmonische Reihe divergiert.