I.

(a) Sei $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die *bijektive* Funktion mit den folgenden Eigenschaften

1. $\sigma(1) = 1$,
2. $\sigma(2^n) = 2n$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
3. σ ist monoton steigend über $(2^n, 2^{n+1})$ und $\sigma(k) \in 2\mathbb{N}+1$ für alle $2^n < k < 2^{n+1}$.

Beispiel: $\sigma(1) = 1$, $\sigma(2) = 2$, $\sigma(3) = 3$, $\sigma(4) = 4$, $\sigma(5) = 5$, $\sigma(6) = 7$, $\sigma(7) = 9$, $\sigma(8) = 6$, $\sigma(9) = 11$, $\sigma(10) = 13$, $\sigma(11) = 15$, $\sigma(12) = 17$, $\sigma(13) = 19$, $\sigma(14) = 21$, $\sigma(15) = 23$, $\sigma(16) = 8$.

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{2k-1} \geq \frac{(2^{n+1}-1)-(2^n+1)+1}{2^{n+2}-3} = \frac{2^{n+1}-2^n-1}{2^{n+2}-3} = \frac{2^n-1}{4(2^n-1)+1} \tag{1}$$

$$= \frac{1}{4+\frac{1}{2^n-1}} \geq \frac{1}{5}. \tag{2}$$

Definiere die Mengen $A, \{A_N\}_{N\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$, wie folgt :

$$A = \mathbb{N} \cap \left\{n : \exists k \in \mathbb{N} \text{ so dass } n = 2^k\right\}$$
$$A_N = A \cap \{1, \cdots, N\}.$$

Es gilt für alle $N \in \mathbb{N}$

$$\text{Kard}(A_N) \leq \log_2(N).$$

Also ist

$$\sum_{k\in A_N} \frac{1}{2k} \leq \sum_{k=1}^{\log_2(N)} \frac{1}{2k} \leq 2\log|\log_2(N). \tag{3}$$

Folglich gilt wegen (1) und (3)

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{\sigma(k)-1}}{\sigma(k)} \geq \frac{1}{5}\log_2(N) - 2\log|\log_2(N)| \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

(b), (c) Seien $\sum a_n$ eine bedingte Reihe und $r \in \mathbb{R}$. Wir definieren durch Induktion eine *bijektive* Funktion $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, und eine Folge $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ so dass

$$\begin{cases} \sigma(1) = 1 \\ A_1 = a_{\sigma(1)} = a_1 \\ \sigma(n+1) = \begin{cases} \inf \mathbb{N} \setminus \{\sigma(1), \cdots, \sigma(n)\} \cap \{k : a_k \geq 0\}, & \text{falls } A_n \leq r \\ \inf \mathbb{N} \setminus \{\sigma(1), \cdots, \sigma(n)\} \cap \{k : a_k < 0\}, & \text{falls } A_n > r. \end{cases} \\ A_{n+1} = A_n + a_{\sigma(n+1)} \end{cases}$$

Die Behauptung, dass

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} r.$$

folgt leicht.

II. Sei $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ der Konverganzradius der Potenzreihe.

(a) Sei $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$. Es gilt

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!}{(n+1)!}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e$$

also $R = e$.

(b) Sei $a_n = \dfrac{n^a}{n!}$. Es gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^a \frac{1}{(n+1)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

also $R = \infty$.

(c) Sei $a_n = \sqrt{2^n + 3^n}$. Es gilt

$$a_n = \left(\sqrt{3}\right)^n \sqrt{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}.$$

Also gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt{3}\sqrt[2n]{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{3}$$

und $R = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

(d) Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ die Folge

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ ein Quadratzahl ist} \\ 0 & \text{ander.} \end{cases}$$

Dann gilt $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, und $R = 1$.

(e) Sei $a_n = \dbinom{2n}{n}$. Es gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 4,$$

also $R = \dfrac{1}{4}$.

(f) Sei $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Dann gilt

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}},$$

also

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

und $R = 1$.

III.

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$, sei

$$z^{\underline{n}} = z(z-1)\cdots(z-n+1).$$

Zeigen wir, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$(s+t)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s^{\underline{n-k}} t^{\underline{k}}$$

gilt. Beweise mit vollständige Induktion. Es ist klar für $n = 0$.

Induktionsschritt. Wir haben wegen $\binom{n}{n+1} = \binom{n}{-1} = 0$ und Pascalsches Gleichung

$$\begin{aligned}
(s+t)^{\underline{n+1}} &= (s+t-n)(s+t)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left((s-n+k)+(t-k)\right)\binom{n}{k} s^{\underline{n-k}} t^{\underline{k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s^{\underline{n+1-k}} t^{\underline{k}} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s^{\underline{n-k}} t^{\underline{k+1}} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} s^{\underline{n+1-k}} t^{\underline{k}} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} s^{\underline{n+1-k}} t^{\underline{k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} s^{\underline{n+1-k}} t^{\underline{k}} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} s^{\underline{n+1-k}} t^{\underline{k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) s^{\underline{n+1-k}} t^{\underline{k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} s^{\underline{n+1-k}} t^{\underline{k}}.
\end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k}\binom{t}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} s^{\underline{k}} t^{\underline{n-k}} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s^{\underline{n-k}} t^{\underline{k}} = \frac{1}{n!}(s+t)^{\underline{n}} = \binom{s+t}{n}.$$

(b) Wir haben wegen (a) die Gleichung

$$B_s(z)B_t(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k}\binom{t}{n-k} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s+t}{n} z^n = B_{s+t}(z).$$

(c) Es gilt für alle $|x| < 1$, $B_1(x) = 1 + x$, also haben wir für alle $n \in \mathbb{N}$ und $|x| < 1$ wegen (b)

$$\left(B_{\frac{1}{n}}(x)\right)^n = B_1(x) = 1 + x.$$

Folglich gilt

$$B_{\frac{1}{n}}(x) = (1+x)^{\frac{1}{n}}$$

und für alle $m \in \mathbb{N}$

$$B_{\frac{m}{n}}(x) = \left(B_{\frac{1}{n}}(x)\right)^m = (1+x)^{\frac{m}{n}}.$$

IV.

(a) Seien $a_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}$ und $b_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}$. Dann gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2n+3} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Also ist der Konvergenzradius der Potenzreihen ∞.

(b) Wir haben

$$\begin{aligned}
\cos(z+w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(z+w)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^k w^{2n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k!} \frac{1}{(2n-k)!} (-1)^n z^k w^{2n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!} \frac{1}{(2n-2k)!} (-1)^n z^{2k} w^{2n-2k} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)!} \frac{1}{(2n-(2k+1))!} (-1)^n z^{2k+1} w^{2n-(2k+1)}
\end{aligned}$$

$$\cos(z)\cos(w) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\frac{(-1)^{n-k}}{(2n-2k)!} z^{2k}w^{2n-2k} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!}\frac{1}{(2n-2k)!}(-1)^n z^{2k}w^{2n-2k}$$

$$\sin(z)\sin(w) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)!}\frac{1}{(2n-(2k+1))!}(-1)^{n-1} z^{2k+1}w^{2n-1-2k}$$

also

$$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w).$$

Die andere Formel ist ähnlich.