I.

(a) Es gilt für alle $0 < a < b$ und $k > 1$

$$\left(\sqrt[k]{a} + \sqrt[k]{b-a}\right)^k = a + (b-a) + \underbrace{\sum_{j=1}^{k-1} \binom{n}{k} a^{\frac{j}{k}} b^{\frac{k-j}{k}}}_{>0} > b.$$

also

$$\sqrt[k]{a} + \sqrt[k]{b-a} > \sqrt[k]{b}.$$

(b) Sei $\{x_n\} \subset [0, \infty)$ so dass $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \geq 0$. Also für alle $\varepsilon > 0$ existiert $N \in \mathbb{N}$ so dass für alle $n \geq N$, gilt

$$|x_n - x| < \varepsilon^k \implies \sqrt[k]{|x_n - x|} < \varepsilon.$$

Damit $\sqrt[k]{|x_n - x|} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und gilt wegen (1)

$$0 \leq \limsup_{n\to\infty} |\sqrt[k]{x_n} - \sqrt[k]{x_n}| \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[k]{|x_n - x|} = 0.$$

II. Wir haben

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in [a,b], |f(x) - f(y)| \leq \delta \implies |x - y| \leq \varepsilon.$$

Anderfalls existiert $\varepsilon > 0$, und $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [a,b]$ so dass

$$|f(x_n) - f(y_n)| \leq \frac{1}{n} \text{ und } |x_n - y_n| > \varepsilon. \tag{1}$$

Die Intervall $[a,b]$ ist Kompakt also existiert ein streng monoton steigend Funktion $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $x, y \in [a,b]$, so dass

$$x_{\varphi(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x, \quad y_{\varphi(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y.$$

Die Funktion $f : [a,b] \to B$ ist stetig also gilt wegen (1)

$$|f(x) - f(y)| = \lim_{n\to\infty} |f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\varphi(n)} = 0$$

und f ist bijectik also $x = y$, aber das ist unmöglich mit (1) weil

$$|x - y| = \lim_{n\to\infty} |x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| \geq \varepsilon > 0$$

ist.

III. In diesen Übungen benutzen wir dass die Funtionen $\sqrt{\cdot}$, exp und log auf ihrem Definitionsmengen stetig sind.

(a) Wir haben für alle $x \geq 0$

$$\frac{e^x}{x^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k-n}}{n!} \geq \frac{x}{(n+1)!} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Dann gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty.$$

(b) Für alle $x \neq 0$ gilt

$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \frac{(1+x) - (1-x)}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1.$$

(c) Wegen (a) gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

also

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x} = 0. \tag{2}$$

Folglich gilt

$$\frac{x-\sqrt{x}}{x+\log(x)} = \frac{1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{1+\dfrac{\log(x)}{x}} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

(d) Da (mit $y = -\log(x)$)

$$\lim_{x\to 0} x\log(x) = \lim_{y\to\infty} \left(-ye^{-y}\right) = 0$$

gilt folglich

$$x^x = e^{x\log(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} e^0 = 1.$$

(e) Definiere für alle $x > 1$, $y = -\log\log(x)$, so dass $y \to \infty$ wenn $x \to 1+$. Dann gilt

$$\lim_{x\to 1+} \log(x)\log\log(x) = \lim_{y\to\infty} (-ye^{-y}) = 0.$$

(f) Wir haben für alle $y \neq 0$

$$\frac{e^y - 1}{y} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^{n-1}}{n!} \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 1.$$

und

$$\lim_{y\to 0} \frac{y}{e^y - 1} = 1$$

also (mit $y = \log(1+x)$)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{e^y - 1} = 1.$$

Folglich gilt

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\log(1+x)}{x}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} e.$$

(g) Da $|\sin| \leq 1$ gilt

$$0 \leq \left| x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

(h) Es gilt

$$\left|\frac{x\cos(x)}{1+x^2}\right| \leq \left|\frac{x}{1+x^2}\right| = \left|\frac{1}{x+\frac{1}{x}}\right| \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(i) Definiere die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto e^{x\sin(x)}$, und die Folgen $x_n = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$ und $y_n = \pi n$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$ aber

$$f(x_n) = e^{x_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \quad \text{und } f(y_n) = e \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e,$$

also der Grenzwert existiert nicht.

IV.

(a) Sei $\varepsilon > 0$, und $\delta = \dfrac{\varepsilon}{L} > 0$. Dann für alle $x, y \in I$ so dass $|x-y| \leq \delta$ gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y| \leq L\delta = \varepsilon$$

also f gleichmässige Stetig ist.

(b) 1. Die Funktion $f(x) = x^2$ ist für $x \in I = [0,1]$ Lipschitz-stetig mit $L = 2$, denn es gilt

$$|x^2 - y^2| = |(x-y)(x+y)| \leq (x+y)|x-y| \leq 2|x-y|.$$

Insbesondere ist f nach Teil (a) stetig.

2. Es gilt für alle $x > 0$

$$\frac{|f(2x) - f(x)|}{|2x - x|} = \frac{(2x)^2 - x^2}{x} = 3x \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

also

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{|f(2x) - f(x)|}{|2x - x|} = \infty$$

und f nicht Lipschitz stetig ist (aber klar stetig, da $|f(x) - f(y)| \leq |x+y||x-y|$).

3. Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist stetig, aber nicht Lipschitz-stetig. Betrachte $x_k = \frac{1}{k}$ und $y = 0$, dann gilt

$$\frac{f(x_k) - f(y)}{|x_k - y|} = \frac{f(1/k) - f(0)}{1/k} = \frac{k}{\sqrt{k}} = \sqrt{k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Da die rechte Seite gegen $+\infty$ strebt für $k \to \infty$, kann die Funktion nicht Lipschitz-stetig sein.

Sei nun $x \in (0,1]$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann folgt mit der dritten binomischen Formel

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$$

Mit $\delta(x,\varepsilon) = \varepsilon\sqrt{x}$ gilt dann

$$|y - x| < \delta(x,\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq \frac{|x-y|}{\sqrt{x}} < \varepsilon$$

und folglich ist f stetig in x.

Sei schliesslich $x = 0$. Dann gilt

$$|f(y) - 0| = \sqrt{y} < \varepsilon$$

falls $|y| < \varepsilon^2 = \delta(0,\varepsilon)$ und somit ist f auch in 0 stetig.

4. Die Funktion $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ist nicht stetig in dem Punkt $x = 0$, denn es gilt

$$|f(0) - f(x)| = \frac{1}{x} \geq 1$$

für alle $x \neq 0$. Folglich kann es kein $\delta(0, \varepsilon = 1) > 0$ geben, für das die Stetigkeitsbedingung erfüllt ist.

V.

1. Die Funktionen $z \mapsto \overline{z}$ und $z \mapsto |z|$ sind stetige Abbildungen (sogar Lipschitz stetig mit Konstante 1) denn es gilt:

$$|\overline{z} - \overline{w}| = |z - w|, \qquad ||z| - |w|| \leq |z - w|$$

Des weiteren ist für jedes $s \in \mathbb{Q}$ die Abbildung

$$\mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto t^s$$

stetig (siehe Vorlesung). Da die Verkettung von stetigen Funktionen wieder stetig ist, folgt sofort, dass $z \mapsto |z|^s$ eine stetige Funktion ist. Ebenso ist der Quotient von stetigen Funktionen wieder stetig und foglich ist $f(z) = \overline{z}/|z|^s$ eine stetige Funktion.

2. Eine stetige Fortsetzung von f hat die Gestalt

$$F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad F(z) = \begin{cases} f(z) & z \neq 0 \\ w & z = 0 \end{cases}$$

für ein $w \in \mathbb{C}$. Die Frage ist nun, ob wir w so wählen können, dass F eine stetige Funktion ist. Aus Teil (a) folgt, dass F in $\mathbb{C}^*$ stetig ist und es bleibt nur noch die Stetigkeit von F im Ursprung zu überprüfen. Nach dem Folgenkriterium ist F im Ursprung stetig, falls für jede Nullfolge $z_k \to 0$ gilt:

$$w = F(0) = \lim_{k\to\infty} F(z_k)$$

Wenn wir die Nullfolge so wählen, dass $z_k \in \mathbb{C}^*$ liegt, dann gilt $F(z_k) = f(z_k)$ und es folgt sofort, dass es höchstens eine stetige Fortsetzung F von f geben kann.

Da $|f(z)| = |z|^{1-s}$ gilt, betrachten die drei Fälle $s > 1$, $s = 1$ und $s < 1$ separat:

(a) Wenn $s > 1$ gilt, divergiert der Betrag von $f(z_k)$ gegen unendlich, wenn z_k gegen 0 konvergiert. Konkreter betrachte die Folge $z_k = \dfrac{1}{k}$. Dann gilt

$$F(z_k) = f\left(\frac{1}{k}\right) = k^{s-1} \to \infty.$$

Folglich kann es keine stetige Fortsetzung geben, denn dann müsste $F(z_k)$ gegen ein $w \in \mathbb{C}$ konvergieren.

(b) Sei $s = 1$. Betrachte die Nullfolgen $x_k = \dfrac{1}{k}$ und $y_k = \dfrac{i}{k}$. Dann gilt $f(x_k) = 1$ und $f(y_k) = -i$ und wir erhalten

$$w = F(0) = \lim_{k\to\infty} F(x_k) = 1, \qquad w = F(0) = \lim_{k\to\infty} F(y_k) = -i.$$

Das ist aber unmöglich und folglich besitzt f keine stetige Fortsetzung in diesem Fall.

(c) Sei schliesslich $s < 1$. Wir definieren $F(0) = 0$. Dann gilt für jede Nullfolge $z_k \to 0$

$$\lim_{k\to\infty} |F(z_k)| = \lim_{k\to\infty} |z_k|^{1-s} = 0.$$

Die letzte Gleichheit gilt, da die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t^\alpha$ für $\alpha > 0$ in 0 stetig ist. Wir haben damit gezeigt, dass $F(0) = 0$ eine stetige Fortsetzung von f definiert.

VI. Definiere die *stetige* Funktion h mit

$$\begin{cases} h : \left[0, \dfrac{1}{2}\right] \to \mathbb{R} \\ x \to f(x) - f\left(x + \dfrac{1}{2}\right). \end{cases}$$

Dann gilt

$$h(0) = f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) = -h\left(\frac{1}{2}\right)$$

also

$$0 \in [-|h(0)|, |h(0)|] = \begin{cases} \left[h(0), h\left(\dfrac{1}{2}\right)\right] & \text{falls } h(0) \leq 0 \\ \left[h\left(\dfrac{1}{2}\right), h(0)\right] & \text{anderfalls} \end{cases}$$

und existiert wegen des Zwischenwertsatzes $c \in [0, \frac{1}{2}]$, so dass

$$h(c) = f(c) - f\left(c + \frac{1}{2}\right) = 0.$$