Seien $a \in \mathbb{R}$ und $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der folgenden Eigenschaft: existiert $\varepsilon > 0$ so dass $h(x) \neq 0$ für alle $x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \setminus \{a\}$. Schreiben wir

$$f(x) = g(x) + O_a(h(x))$$

wenn

$$\limsup_{x\to a} \left| \frac{f(x) - g(x)}{h(x)} \right| < \infty$$

ist.

Beispiel. Wenn die Reihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

ein positiv Konvergenzradius habe, gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k (z-a)^k + O_a(|z-a|^{n+1}),$$

da

$$\lim_{z\to a} \left| \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \left(f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k (z-a)^k \right) \right| = \lim_{z\to a} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (z-a)^{k-(n+1)} \right| = |a_{n+1}| < \infty.$$

I.

(a) 1. Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\log(x)} = 0. \tag{1}$$

Also ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{x^x}{e^{nx}} = \frac{e^{x\log(x)}}{e^{nx}} = \exp\left(\underbrace{x\log(x)}_{\underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty} \underbrace{\left(1 - \frac{n}{\log(x)}\right)}_{\underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 1 \text{ wegen (1)}} \right) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

2. Wir haben wegen Serie 8, III. (a) für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

also gilt auch, denn

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{x} = \infty,$$

die Gleichung

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{\frac{x}{n}}} = 0. \tag{2}$$

Sei $y = e^x$. Dann $y \to \infty$ wenn $x \to \infty$ und

$$\frac{x}{e^{\frac{x}{n}}} = \frac{\log(y)}{y^{\frac{1}{n}}} = \frac{\log(y)}{\sqrt[n]{y}}. \tag{3}$$

Folglich gilt wegen (2) und (3)

$$\lim_{y\to\infty} \frac{\log(y)}{\sqrt[n]{y}} = 0.$$

(b) 1. Wir haben für alle $a > 0$

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$$
$$\lim_{x\to\infty} a\log(x) = \infty$$

also gilt

$$x^a = e^{a\log(x)} \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty.$$

2. Es gilt für alle $a > 0$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0,$$
$$\lim_{x\to 0} a\log(x) = -\infty$$

also

$$x^a = e^{a\log(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

3. Seien $a > 0$, $b = \dfrac{1}{a} > 0$, und $m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ so dass $m \le b < m+1$. Dann gilt für alle $x \ge 0$

$$\frac{e^x}{x^b} = \frac{1}{x^b}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \ge \frac{x^{m+1-b}}{(m+1)!} \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$$

also

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^b} = \infty. \tag{4}$$

Da

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^a} = 0$$

folgt wegen (4) (und $ab = 1$)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{ax}} = 0.$$

Folglich gilt (mit $y = e^x$)

$$\lim_{y\to\infty}\frac{\log(y)}{y^a} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{ax}} = 0.$$

4. Es gilt (mit $y = -\log(x)$)

$$\lim_{x\to 0} x^a\log(x) = \lim_{y\to\infty} e^{-ay}(-y) = \lim_{y\to\infty}\frac{-y}{e^{ay}} = 0.$$

II.

1. Für $0 < x < 1$ ist $\left\{\dfrac{x^n}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge. Nach dem Leibniz Kriterium konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ und es gilt die Restglied Abschätzung:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k\right| \le \frac{x^{n+1}}{n+1} \le \frac{1}{n+1}.$$

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = \log(1+x)$ für $-1 < x < 1$ gilt. Die Restglied Abschätzung für $0 < x < 1$ ist folglich äquivalent zu

$$\left|\log(x+1) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k\right| \le \frac{1}{n+1}. \tag{5}$$

2. Da die linkte Seite von (5) in x stetig ist, erhalten wir

$$\left|\log(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| = \lim_{x\uparrow 1} \left|\log(x+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k\right| \leq \frac{1}{n+1}.$$

und folglich

$$\log(2) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

III.

1. Es gilt wegen **I.**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x} = 0$$

also

$$x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\log(x)}{x}} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

2. Wir haben

$$e^y = 1 + y + O(|y|^2)$$

also

$$\sqrt[n]{x} = e^{\frac{\log(x)}{n}} = 1 + \frac{\log(x)}{n} + O\left(\frac{\log^2(x)}{n^2}\right)$$

und

$$n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right) = \log(x) + O\left(\frac{\log^2(x)}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \log(x).$$

3. Es gilt für alle $x > -1$

$$e^x = 1 + x + O(|x|^2), \quad \log(1+x) = x + O(|x|^2) \tag{6}$$

also haben wir für alle $a \in \mathbb{R}$

$$(1+x)^a = e^{a\log(1+x)} = e^{ax + O(a^2|x|^2)}. \tag{7}$$

Wir haben für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + O(|x|^4),$$

also

$$n\left(1 - \cos\left(\frac{2}{n}\right)\right) = n\left(\frac{4}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) = \frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \tag{8}$$

Folglich gilt wegen (6) und (8)

$$\left(n + 1 - n\cos\left(\frac{2}{n}\right)\right)^n = \left(1 + \frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^n = e^{2+O\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^2.$$

4. Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\sin(x) = x + O(|x|^3). \tag{9}$$

Da $\sin(0) = 0$ folgt $\arcsin(0) = 0$. Definiere $a_1 \in \mathbb{R}$ so dass

$$\arcsin(x) = a_1 x + O(|x|^2). \tag{10}$$

Da $\sin(\arcsin(x)) = x$ für alle $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ folgt direkt wegen (9) und (10)

$$x = \sin(\arcsin(x)) = \sin(a_1 x + O(|x|^2)) = a_1 x + O(|x|^2) + O\left(\left|a_1 x + O(|x|^2)\right|^3\right) = a_1 x + O(|x|^2)$$

also

$$a_1 = 1$$

und

$$\frac{x}{\arcsin(2x)} = \frac{x}{2x + O(|x|^2)} = \frac{1}{2} + O(|x|) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

5. Es gilt

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{6} + O(|x|^5)$$

also

$$\frac{\sinh(x) - x}{x^3} = \frac{1}{6} + O(|x|^2) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{6}.$$

6. Es gilt

$$\lim_{x \to \infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

also folgt wegen (7)

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{2\arctan(n)}{n}\right)^n = e^{\pi}.$$

IV.

1. $a^0 = e^{0 \log(a)} = e^0 = 1$. (Dabei folgt $e^0 = 1$ direkt aus der Definition der Exponentialfunktion.)
2. $a^1 = e^{1 \log(a)} = e^{\log(a)} = a$. (Der Logaritmus ist per Definition die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.)
3. Aus der Eigenschaft $e^{u+v} = e^u e^v$ der Exponentialfunktion folgt
$$a^{z+w} = e^{(z+w)\log(a)} = e^{z \log(a) + w \log(a)} = e^{z \log(a)} e^{w \log(a)} = a^z a^w.$$
4. Wenn wir den Logarithmus von $a^x = e^{x \log(a)}$ bilden, erhalten wir die Rechenregel $\log(a^x) = x \log(a)$. Damit folgt
$$(a^x)^z = e^{\log(a^x) z} = e^{x \log(a) z} = a^{xz}.$$
5. Aus $e^{\log(ab)} = ab = e^{\log(a)} e^{\log(b)} = e^{\log(a) + \log(b)}$ folgt die Rechenregel $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$. Damit erhalten wir
$$(ab)^z = e^{\log(ab) z} = e^{\log(a) z + \log(b) z} = e^{\log(a) z} e^{\log(b) z} = a^z b^z.$$
6. Aus der Reihendarstellung der Exponentialfunktion folgt sofort die Rechenregel $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$. Mit der Beziehung $|z|^2 = z\overline{z}$ erhalten wir
$$|e^z|^2 = e^z e^{\overline{z}} = e^{z + \overline{z}} = e^{2\mathrm{Re}(z)} = \left(e^{\mathrm{Re}(z)}\right)^2$$
und folglich $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$. Hieraus folgt die allgemeine Regel:
$$|a^z| = \left|e^{\log(a) z}\right| = e^{\mathrm{Re}(\log(a) z)} = e^{\log(a) \mathrm{Re}(z)} = a^{\mathrm{Re}(z)}.$$

V.

1. Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2} \right| &= \left| \frac{y^2 - x^2}{(1+x^2)(1+y^2)} \right| = |x-y| \frac{|x+y|}{(1+x^2)(1+y^2)} \\ &\leq |x-y| \left(\frac{|x|}{1+x^2} + \frac{|y|}{1+y^2} \right) \\ &\leq |x-y|. \end{aligned}$$

   Dabei haben wir verwendet, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{|x|}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}.$$

   Diese Abschätzung erhält durch umformen von $(1-|x|)^2 \geq 0$. Wir haben somit gezeigt

$$|x-y| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(y)| < \delta$$

   und f ist gleichmässig stetig. (Die Rechnung zeigt, dass f sogar Lipschitz stetig ist mit $L = 1$).

2. Die Exponentialfunktion ist nicht gleichmässig stetig. Für $\delta > 0$ gilt

$$\left| e^{x+\delta} - e^x \right| = e^x \left(e^\delta - 1 \right)$$

   und die rechte Seite strebt gegen $+\infty$ für $x \to \infty$. Insbesondere kann sie nicht kleiner ε bleiben.

3. Diese Funktion ist nicht gleichmässig stetig. Betrachte die Nullfolgen

$$x_n = \frac{1}{n\pi}, \qquad y_n = \frac{1}{n\pi + \pi/2}.$$

   Für diese gilt offenbar

$$f(x_n) = \sin(n\pi) = 0, \qquad f(y_n) = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n.$$

   Da x_n und y_n beide gegen 0 konvergieren, strebt der Abstand $|x_n - y_n|$ gegen 0. Insbesondere existiert für jedes $\delta > 0$ ein grosses n, sodass $|x_n - y_n| < \delta$ gilt. Andererseits gilt $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$ für jedes n und somit kann die Definition der gleichmässigen Stetigkeit für $\varepsilon < 1$ nicht erfüllt sein.