Aufgabe I.

Gegeben seinen Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$. Zeigen Sie:

1. Wenn f und g surjektiv sind, so ist es auch $g \circ f$.
2. Wenn f und g injektiv sind, so ist es auch $g \circ f$.
3. Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, so ist auch g surjektiv.
4. Wenn $g \circ f$ injektiv ist, so ist auch f injektiv.

Aufgabe II.

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to (-1, 1), \qquad f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

bijektiv ist.

Aufgabe III.

Welche der folgenden Aussagen gelten für jede Abbildung $f : X \to Y$ zwischen zwei Mengen X, Y und je zwei Teilmengen $A, B \subset X$?

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
2. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
3. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
4. $f(A \cap B) \supset f(A) \cap f(B)$.

Aufgabe IV.

Finden Sie die komplexen Lösungen der Gleichung:

$$|z|^2 - z|z| + z = 0.$$

Aufgabe V.

Zeigen Sie *ohne* Induktion:

1. $$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0,$$

2. $$\prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_n}{a_0}, \qquad \text{(wobei } a_k \neq 0 \text{ für } k = 0, \ldots, n\text{)},$$

3. $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{1+n},$$

4. $$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n+k}\right) = 2 - \frac{1}{n+1}.$$

.