Aufgabe I.

Schreiben Sie die Partialbruchzerlegung der folgenden rationalen Funktionen:

$$(a)\ \frac{1}{z^2(z-1)}, \qquad (c)\ \frac{z+1}{(z^2+2z+1)(z+3)},$$
$$(b)\ \frac{z^5+1}{(z+1)^2(z-3)}, \qquad (d)\ \frac{z^2-z+3}{(z^2-1)(z+5)}.$$

Aufgabe II.

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten und bestimmen Sie gegebenfalls den Grenzwert der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$:

$$(a)\ a_n = \frac{n^n}{n!}, \qquad (c)\ a_n = \frac{(n+1)^2}{n} - \frac{n^2}{n+1},$$
$$(b)\ a_n = \frac{3n^2-6n+7}{4n^2+9n-4}, \qquad (d)\ a_n,\ \text{mit } a_1 = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}, a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\ \text{etc.}$$

Aufgabe III.

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ drei reelle Zahlenfolgen mit

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

Man zeige: Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = c \in \mathbb{R}\,,$$

so ist auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und besitzt ebenfalls den Grenzwert c.

Aufgabe IV.

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion die folgenden Identitäten:

(a)

$$\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{N+n}\,,$$

(b)

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2+n+1}{n(n+1)}\,.$$