Aufgabe I.

Zeigen Sie die folgende Aussage über Reihen von reellen Zahlen: Falls die Reihen $\sum a_n$ und $\sum b_n$ konvergieren, so konvergiert auch die Reihe $\sum(a_n + b_n)$ und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right).$$

Aufgabe II.

Bestimmen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren.

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}, \qquad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n},$$
$$(b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \qquad (d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2+1}.$$

Aufgabe III. Abelsche partielle Summation.

Seien $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ zwei komplexe Folgen. Definiere für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k, \quad A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad \left(\text{Konvention } \sum_{k=1}^{0} * = 0\right).$$

(a) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Identität:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_n.$$

(b) Falls $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ eine monoton fallende, reelle Nullfolge ist, beweisen Sie, dass die Folge S_n konvergiert.

(c) Benützen Sie (b), um das Leibniz-Kriterium zu zeigen: Sei $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende, reelle Nullfolge, dann konvergiert die Folge

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k b_k.$$