Aufgabe I. Zeigen Sie für alle $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ die Identität

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Hinweis: *Benutzen Sie die Eulersche Formel* $e^{ikx} = \cos(kx) + i\sin(kx)$ *sowie die Formel für die Partialsummen der geometrischen Reihe oder die vollständige Induktion und die Additionstheoreme für* $\cos$ *und* $\sin$.

Aufgabe II. Benutzen Sie die Abelsche partielle Summation und Aufgabe **I.** um zu zeigen, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

konvergiert.

Theorem (Abel, [Abe26] 1826)**.** *Seien* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ *zwei komplexe Folgen. Definiere für alle* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k, \quad A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Falls $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *beschränkt ist und* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ *eine monoton fallende, reelle Nullfolge ist, konvergiert die Folge* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe III. Bestimmen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren, und wenn ja, berechnen Sie diese.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-1}{x^2}$.

Aufgabe IV. Bestimmen Sie $c, d \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 3\sqrt{-x}+1 & \text{falls } x < 0 \\ cx + d & \text{falls } 0 \le x \le 1 \\ x^{10} - 1 & \text{falls } x > 1 \end{cases}$$

überall stetig ist.

Hinweis: Skizzieren Sie den Funktionsgraphen.

Literatur

[Abe26] Niels Henrik Abel. Recherches sur la série $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots$. *Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von* Crelle*, Bd. I, Berlin*, 1826.