Aufgabe I.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^3$$

streng monoton wachsend, bijektiv und differenzierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Umkehrfunktion $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ an der Stelle $y = 0$ nicht differenzierbar ist.

Aufgabe II. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

$$(a) \ \lim_{x\to\infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} \right),$$

$$(b) \ \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\log(n)} \left(\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \right),$$

$$(c) \ \lim_{x\to 0} \frac{\arctan(\sqrt{1+2x^2}-1)}{x^4} - \frac{1}{x^2}$$

Aufgabe III. Finden Sie die Extrema der folgenden Funktionen und bestimmen sie maximale Intervalle auf denen die Funktionen monoton sind.

$$(a) \ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \frac{x}{1+|x|},$$

$$(b) \ f : (0,1) \cup (1,\infty) \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \frac{x}{\log(x)},$$

$$(c) \ f : [0,2] \to \mathbb{R}, \ x \mapsto x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1.$$