I. Prädikatenlogik.

(a) Was bedeuten die folgenden Aussagen? Sind Sie wahr oder falsch?

1. $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} : y > x$.
2. $\exists x \in \mathbb{R}, \nexists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : (q \neq 0 \Rightarrow x = p/q)$.
3. $\forall (a, b, c) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : (c|ab \Rightarrow (c|a) \vee (c|b))$.

Bemerkung. Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$, $a|b$ gilt genau dann, wenn existiert $c \in \mathbb{Z}$, so dass $b = ac$.

(b) Schreiben Sie folgende Aussagen als prädikatenlogischen Ausdruck:

1. „24 ist keine Quadratzahl."
2. „Basel gewinnt alle Fussballspiele gegen Zürich." (wobei F die Menge von Fussballspielen ist und $G : F \to \{\mathrm{FCB}, \mathrm{FCZ}, \mathrm{unentschieden}\}$ die Funktion, die einem Fussballspiel den Gewinner zuordnet.)
3. „Es gibt unendlich viele Primzahlen".

II. Praktische Arbeit.

Stellen Sie die folgenden Mengen in geeigneten Figuren anschaulich dar:

(a) $\mathbb{R} \cap \left\{x : \dfrac{1}{1-x} < 1 - \dfrac{x}{2}\right\}$.

(b) $\mathbb{C} \cap \{z : |z-1| + |z+1| = 8\}$.

(c) $\mathbb{R}^3 \cap \{(x, y, z) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + y + z = 1\}$.

III. Induktion. Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

(a) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für alle $n \geq 1$.

(b) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$ für alle $n \geq 1$.

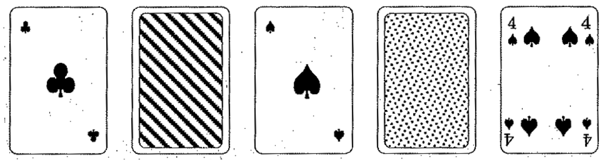
(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$ für alle $n \geq 0$.

IV. Induktion? Wo liegt der Fehler in folgendem Induktionsbeweis?

Behauptung: Alle Pferde haben dieselbe Farbe. Beweis: Sei $P(n)$ die Aussage, dass in jeder Ansammlung von n Pferden alle Pferde dieselbe Farbe aufweisen. $P(1)$ ist offensichtlich wahr. Im Induktionsschritt nehmen wir an, dass $P(k)$ wahr sei, und wollen $P(k+1)$ beweisen: Nehmen wir eine beliebige Gruppe von $k+1$ Pferden. Schicken wir eines weg, so bleiben k Pferde, die also alle die gleiche Farbe haben. Holen wir das Pferd zurück und schicken ein anderes weg, so bleiben wieder k Pferde übrig, die dann alle die gleiche Farbe haben. Da Pferde ihre Farbe nicht ändern, muss dies dieselbe Farbe wie bei der ersten Gruppe sein. Somit haben alle $k+1$ Pferde die gleiche Farbe.

V. Spielkarten.

Welche Spielkarten in der untenstehenden Figur muss man mindestens umdrehen, um mit Sicherheit die Frage „Sind alle Karten mit schraffierter Rückseite Asse?“ beantworten zu können?



VI. Konstruktion der reellen Zahlen.

Ein Dedekindscher Schnitt (von $\mathbb{Q}$) ist eine Teilmenge $A \subset \mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen, so dass

(i) $A \neq \emptyset, A \neq \mathbb{Q}$, und

(ii) A hat kein grösstes Element, und

(iii) Sind $p, q \in \mathbb{Q}$ mit $p > q$ und ist $p \in A$, so ist auch q in A.

Wir definieren $\mathbb{R}$ als die Menge der Dedekindschen Schnitte von $\mathbb{Q}$.

Beispiele: Die Zahl 2 ist repräsentiert durch den Dedekindschen Schnitt $A = \{p \in \mathbb{Q} : p < 2\}$. Die Zahl $\sqrt{2}$ durch: $A = \left\{p \in \mathbb{Q} : p^2 < 2 \vee p < 0\right\}$.

(a) Definieren Sie geeignet Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division auf der Menge $\mathbb{R}$ der Dedekindschen Schnitte und verifizieren Sie die Körperaxiome.

(b) Die Ordnung auf $\mathbb{R}$ ist gegeben durch Inklusion von Mengen, d.h, $A \leq B$ genau dann wenn $A \subset B$. Verifizieren Sie die Ordnungsaxiome.

(c) Zeigen Sie die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$, d.h., dass jede nach oben beschränkte Teilmenge $U \subset \mathbb{R}$ ein Supremum besitzt.

Abgabe: Montag, den 2. Oktober 2017.