I. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

$$(a)\ \lim_{t\to 0}\frac{\sin\left(\sqrt{1+t}-1\right)}{t},\qquad (b)\ \lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(t)+\sin(3t)}{\cos(2t)},\qquad (c)\ \lim_{t\to 0}\frac{3^t-1}{2^t-1},$$

$$(d)\ \lim_{t\downarrow 0}\frac{\sqrt{1-\cos(t)}}{t},\qquad (e)\ \lim_{t\to 1}\frac{t^5-t^3}{\sqrt[3]{t}-\sqrt[5]{t}},\qquad (f)\ \lim_{t\to 0}\left(1+2\sin(t)\right)^{\cot(t)}.$$

II. Finden Sie die Extrema der folgenden Funktionen und bestimmen sie maximale Intervalle auf denen die Funktionen monoton sind.

(a) $f:[0,2]\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^3-3x^2+3x-5.$

(b) $f:[0,6]\to\mathbb{R},\ x\mapsto e^{\sin x - x/2}.$

(c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto e^{-x^2}.$

III.

(a) Definiere für $x\in\mathbb{R}$

$$\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\qquad \cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

Zeigen Sie, dass für die Ableitungen dieser Funktionen gilt

$$\sinh'(x)=\cosh(x)\qquad\text{und}\qquad \cosh'(x)=\sinh(x).$$

(b) Definiere $\tanh:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ durch

$$\tanh(x)=\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

Zeigen Sie, dass $\tanh'(x)=1-\tanh(x)^2$ gilt. Folgern Sie, dass $\tanh(x)$ eine streng monoton wachsende und bijektive Funktion ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Ableitung der Umkehrfunktion $\tanh^{-1}:(-1,1)\to\mathbb{R}$ durch

$$\left(\tanh^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{1-y^2}$$

gegeben ist.

IV. Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

$(a)\ f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^{-x},\qquad (b)\ f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ x\mapsto\cos\left(x^{-x}\right),\qquad (c)\ f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\dfrac{e^{x^2}}{\sqrt{x}}$

$(d)\ f:(1,\infty)\to\mathbb{R},\ x\mapsto\log\log(x)\qquad (e)\ f:(-1,1)\to\mathbb{R},\ x\mapsto\dfrac{\arctan(x)}{1-x^2}\qquad (f)\ \arcsin:[-1,1]\to\mathbb{R}.$

V.(Young'sche Ungleichung) Seien $p,q>1$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ gegeben. Zeigen Sie für alle $a,b\geq 0$ die Ungleichung

$$ab\leq\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

Tipp: *Betrachten Sie für $x\geq 0$ die Funktion $f(x)=\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}x^q-ax$. Zeigen Sie, dass diese Funktion ihr globales Minimum an der Stelle $x_0=a^{\frac{1}{q-1}}$ annimmt und dort der Wert $f(x_0)=0$ hat. Folgern Sie heraus die Young'sche Ungleichung (wobei wir b in x umbenannt haben).*

VI. Für die folgenden reellen Funktionen f finden Sie eine reelle Funktion F so dass $F'=f$.

$(a)\ f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^a,\ \text{mit}\ a\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\qquad (b)\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{x^3}{3}$

$(c)\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\cos(x)\sin(x),\qquad (d)\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\cos(x)\cos(x+1).$

Abgabe: Montag, den 4. Dezember 2017.