I. Berechnen Sie die Taylorreihen der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = \sqrt{1+x}$ in $x = 0$.

(b) $f(x) = \arcsin x$ in $x = 0$.

(c) $f(x) = e^{x^2-4}$ in $x = 2$.

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$ in $x = 0$.

II Welche der folgenden Funktionen sind konvex bzw. konkav?

(a) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, (c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 17x + \pi$,
(b) $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, (d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|^p$ mit $0 < p < \infty$,

III. $(*)$ Ein Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist konvex genau dann, wenn f stetig ist und für alle $x, y \in \mathbb{R}$, gilt

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\Big(f(x) + f(y)\Big).$$

IV. Zeigen sie die Minkowskische Ungleichung, d.h. die Dreiecksungleichung für die p-Norm:

$$\|z + w\|_p \leq \|z\|_p + \|w\|_p$$

für $1 \leq p \leq \infty$ und $z, w \in \mathbb{C}^n$.

Hinweis: Betrachten Sie dazu zunächst $s = (s_1, \cdots, s_n)$ mit $s_k = |z_k + w_k|^{p-1}$ und wenden Sie die Hölder Ungleichung einmal auf s und z und einmal auf s und w an.

V. (**Konstruktion einer *cutoff*-Funktion**)

Wir definieren Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g(x) = f(1) - f(1-x).$$

(a) Zeigen Sie, dass f und g glatte Funktionen sind.

Tipp: *Die Funktion f ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ beliebig oft differenzierbar. Zeige, dass sich die Ableitungen $f^{(n)}(x)$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen lassen.*

(b) Zeigen Sie, dass g monoton wachsend ist, $\operatorname{sign}(g(x)) = \operatorname{sign}(x)$ gilt und, für $x \geq 1$, $g(x) = f(1)$ erfüllt ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\beta(x) = e^e f(g(x))$ monoton wachsend ist und für $x \leq 0$ gleich null und für $x \geq 1$ gleich eins ist.

(d) Konstruieren Sie für $a < b$ und $\varepsilon > 0$ eine C^∞-Funktion $\rho : \mathbb{R} \to [0, 1]$ mit $\rho(x) = 1$ für $x \in [a, b]$ und $\rho(x) = 0$ für $x \notin [a - \varepsilon, b + \varepsilon]$.

VI.

(a) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann integrierbar (insbesondere beschränkt) und g Lipschitz stetig. Zeigen Sie, dass $g \circ f$ Riemann integrierbar ist.

(b) Zeigen Sie (a) auch für komplexwertige Funktionen und folgern Sie, dass mit f auch $|f|$, $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$, f^2 Riemann integrierbar sind.

(c) $(*)$ Zeigen Sie die Aussage für g nur stetig.

Abgabe: Montag, den 11. Dezember 2017.