I. Zeigen Sie, dass jede monotone Funktion Riemann integrierbar ist.

II. Berechnen Sie für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ das Integral

$$\int \frac{cx+d}{x^2+2\,ax+b}$$

III. Bestimmen Sie mittels Partialbruchzerlegung die folgenden Integrale:

$$(a) \int \frac{t+2}{t^2(t^2+2)}\,dt, \quad (c) \int \frac{t^4+1}{(t^2+1)^2}, \quad (e) \int \frac{dw}{t^3+1},$$
$$(b) \int \frac{t\,dt}{t^3+t^2-t-1}, \quad (d) \int \frac{dt}{t^6-1}, \quad (f) \int t^3 \arctan t\,dt.$$

IV. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

$$(a) \int \sin^2(t)e^{-t}\,dt, \quad (c) \int \sinh(t)\cos(t)\,dt, \quad (e) \int \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{t}-t}\,dt,$$
$$(b) \int \frac{1}{1+\cos(t)}\,dt, \quad (d) \int \frac{t^3}{\sqrt{t^2+1}}\,dt, \quad (f) \int \frac{dt}{\sqrt{1+e^t}}.$$

V. Wir betrachten für $b > a^2$ die Funktionen

$$f_k(x) = \frac{1}{(x^2+2ax+b)^k}, \quad k \in \mathbb{N}$$

und definieren die unbestimmtem Integrale (bzw. Stammfunktionen)

$$F_k(x) = \int f_k(x)\,dx, \qquad G_k(x) = \int x f_k(x)\,dx.$$

Beachte, dass diese Funktionen nur bis auf die Addition einer Konstante eindeutig bestimmt sind.

(a) Berechnen Sie explizite Ausdrücke für $F_1(x)$ und $G_1(x)$.

(b) Beweisen Sie, dass für $k > 1$ (und geeignete Konstanten) die folgenden Rekursionsformeln erfüllt sind:

$$G_k(x) = \frac{1}{2-2k} f_{k-1}(x) - aF_k(x)$$
$$F_k(x) = \frac{x+a}{(2k-2)(b-a^2)} f_{k-1}(x) + \frac{2k-3}{(2k-2)(b-a^2)} F_{k-1}(x).$$

VI. Riemann-Summen. Berechnen Sie die Grenzwerte:

$$(a) \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}, \quad (b) \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}, \quad (c) \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}},$$
$$(d) \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad (e) \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad (f) \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

VII. Berechnen Sie die folgenden bestimmten oder uneigentlichen Integrale:

$$(a) \int_1^2 \log(t)dt, \quad (b) \int_0^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{1+t^2}}, \quad (c) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan(t))\,dt,$$
$$(d) \int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt, \quad (e) \int_1^{e^\pi} \sin(\log(t))dt, \quad (f) \int_0^1 \log(1+t^2)dt,$$
$$(g) \int_1^\infty \frac{\log(t)}{(1+t)^2}dt, \quad (h) \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+e^t}}, \quad (i) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\log(\sin(t))dt.$$

Abgabe: Montag, den 18. Dezember 2017.