I.

(a) Zeigen Sie den Mittelwertsatz der Integralrechnung: Seien $f, p : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $p \geq 0$. Dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$ so dass

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = f(\xi)\int_a^b p(x)dx$$

(b) Folgern Sie, dass für f reellwertig und in $C^{n+1}(I)$ ein ξ zwischen a und x existiert, so dass für das Restglied der Taylorreihe gilt

$$R_{n+1}(x) = f(x) - T_n f(x, a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

II. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf ihre Konvergenz

$$(a)\ \sum_{n\geq 0} a^{\sqrt{n}},\ \text{mit } 0 < a < 1, \qquad (b)\ \sum_{n\geq 0} u_n,\ \text{ mit } u_{n+1} = 1 - \cos(u_n),\ 0 < u_0 < \pi,$$

$$(c)\ \sum_{n\geq 2} \frac{n^\alpha}{\sum_{k=2}^n \log^2(k)},\ \ \alpha \in \mathbb{R}, \qquad (d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sum_{k=1}^n k^\alpha}, \text{mit } \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

III. Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung für die folgenden Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
&(a)\ y''(x) + 7y'(x) - 15y(x) = 0,\\
&(b)\ y^{(4)}(x) - y(x) = 0,\\
&(c)\ y^{(4)}(x) + 4y''(x) + 4y(x) = 0,\\
&(d)\ y^{(4)}(x) - 2y^{(3)}(x) + 5y''(x) = 0.
\end{aligned}$$

IV. Benutzen Sie die Methode der Variation der Konstanten um eine allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen zu finden.

$$\begin{aligned}
&(a)\ f'' + 4f = \frac{1}{\sin(2x)},\\
&(b)\ y'' + 3y' + 2y = 4e^t,\\
&(c)\ y'' + 3y' + 2y = t,\\
&(d)\ y'' + y = \tan(t),\\
&(e)\ f'' + 9f = \cot(3x).
\end{aligned}$$

V. Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

$$\begin{aligned}
&(a)\ y' + 2y = x^2, && y(0) = -2\\
&(b)\ y' + y = 2\sin(x), && y(0) = \pi\\
&(c)\ y''' - y = (x+1)e^x, && y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -1\\
&(d)\ y'' - y' + y = x - e^x + \cos(x), && y(0) = 1,\ y'(0) = 0.
\end{aligned}$$

VI. Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der folgenden Differentialgleichungen für $x > 0$.

$$\begin{aligned}
&(a)\ x^2y''(x) - 3xy'(x) + 5y(x) = 0,\\
&(b)\ 2xy'(x) - y(x) = \log(x).
\end{aligned}$$

VII. Bestimmen Sie die Lösungen der logistischen Gleichung

$$y'(t) = ay(t) - by(t)^2, \qquad y(0) = y_0$$

für positiven Konstante $a, b > 0$ und positive Anfangsbedinungen $y_0 > 0$. Wie verhält sich die Lösung $y(t)$ für $t \to \infty$?

VIII. Finden Sie die allgemeine Lösung der zeitabhängigen affinen Gleichung

$$y'(t) = a(t)y(t) - b(t).$$

IX. Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

$$\begin{aligned}
&(a)\ xy'(x) = y(x) + x^2, && y(1) = 2,\\
&(b)\ y'(x) = e^y \sin(x), && y(0) = -1,\\
&(c)\ y'(x) = \frac{y}{1-x^2}, && y(1) = 1.
\end{aligned}$$

X. Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

$$\begin{aligned}
&(a)\ y'' + \omega^2 y = \cos(\omega_0 x), \quad \text{mit } \omega, \omega_0 > 0, \omega \neq \omega_0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\\
&(b)\ y'' - 3y' + 2y = \sin(2x).
\end{aligned}$$

XI. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) = F(x(t)), \qquad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0. \tag{1}$$

Physikalisch beschreibt diese Gleichung die eindimensionale Bewegung eines Teilchens der Masse $m = 1$ in einem Kraftfeld $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir nennen eine Stammfunktion $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $U'(x) = -F(x)$ ein Potential für das Kraftfeld F.

(a) Zeigen Sie, dass für jede Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von (1) die Energie

$$E(t) = \frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 + U(x(t))$$

in t konstant ist. Folgern Sie

1. Falls $x(t)$ eine positive Lösung von (1) ist, dann gilt

$$\dot{x} = \sqrt{2E - U(x)} \qquad \text{oder} \qquad \dot{x} = -\sqrt{2E - U(x)}$$

wobei $E = \frac{1}{2}v_0^2 + U(x_0)$ durch die Anfangsbedingungen gegeben ist. Wir können damit (1) auf eine nichtlineare Gleichung erster Ordnung reduzieren.

2. Jede Lösung x mit Energie E verbleibt für alle Zeiten in dem Potentialtopf $\{x : U(x) \leq E\}$.

(b) Die Bewegung eines Massenpunktes der Masse m im Gravitationsfeld einer (im Ursprung fixierten) Zentralmasse M ist gegeben durch die Gleichung

$$\ddot{r}(t) = -\gamma\frac{M}{r^2}, \qquad r(0) = R, \quad \dot{r}(0) = v_0 \tag{2}$$

wobei $r(t)$ den Abstand der beiden Massen bezeichnet. Verifizieren Sie, dass $U(r) = -\frac{\gamma M}{r}$ ein Potential für diese Gleichung ist und folgern Sie, dass jede Lösung mit Energie $E < 0$ beschränkt ist.

(c) Lösen Sie die Bewegungsgleichung explizit in dem Fall $E = 0$ und $v_0 > 0$.

(d) Folgern Sie, dass $v_F = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}}$ die kleinste Anfangsgeschwindigkeit ist für welche eine unbeschränkte Lösung von (2) existiert. Diese Geschwindigkeit heisst Fluchtgeschwindigkeit der Zentralmasse M und ist unabhängig von m. (Zum Beispiel können wir die Fluchtgeschwindigkeit der Erde aus den Daten $g = \frac{M\gamma}{R^2} = 9.81m/s^2$ sowie $R = 6300km$ berechnen zu $v_F = 11.1km/s$.)

Zusätzliche Aufgaben

XII. Sei $u_0 > 0$ und definiere $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}$ so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}.$$

(a) Zeigen Sie dass $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nach $l \in \mathbb{R}$.

(b) Untersuchen Sie die Reihe $\sum\limits_{n\geq 0}(u_n - l)$ und seine Konvergenz.

XIII. Für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\,(s) > 1$ definiere

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Zeigen Sie dass

$$\lim_{s\to 1^+,\, s\in\mathbb{R}} (s-1)\zeta(s) = 1.$$

XIV. $(*)$ Sei $0 < u_0 < \frac{\pi}{2}$ und $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$u_{n+1} = \sin(u_n).$$

(a) Zeigen Sie dass $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

(b) Zeigen Sie dass $\sum\limits_{n\geq 0} u_n^3$ konvergiert. (**Hinweis:** Benutzen Sie $u_{n+1} - u_n$).

(c) Zeigen Sie dass $\sum\limits_{n\geq 0} u_n^2$ divergiert. (**Hinweis:** Benutzen Sie $\log u_{n+1} - \log u_n$).

XV. $(**)$ Sei $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ so dass für alle $n \neq m$,

$$|z_n - z_m| \geq 1.$$

Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{z_n^3}$ konvergiert.

Hinweis: Umordnung.

XVI. $(**)$ Bestimmen Sie die Lösung der quasi-Lineare Differentialgleichung :

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x + \dfrac{x^3}{y} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$