I. Existenz von Wurzeln.

Benutzen Sie die Vollstandigkeit von $\mathbb{R}$ um die Existenz von Wurzeln zu zeigen, d.h.

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall x \in \mathbb{R}, x > 0 \Longrightarrow \exists!\, y : x = y^n.$$

II. Rechnen mit Komplexen Zahlen.

Schreiben Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen für z in Normalform (*d.h.* in der Form $z = a+i\,b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$):

$$(a)\ z = (5+3i)(7-2i), \qquad (c)\ z = \frac{6-i}{5+2i}, \qquad (e)\ z^3 = i,$$
$$(b)\ z = (1+i)^5, \qquad (d)\ z = \frac{9-4i}{2+3i}, \qquad (f)\ z^2 + 1 - i = 0.$$

III. Polynomdivision.

Berechnen Sie mit Polynomdivision:

$$(a)\ \frac{z^3 - 3z^2 + 3z - 1}{z-1}, \qquad (c)\ \frac{4z^4 - 12z^3 + 3z^2 + 13z - 6}{2z^2 + z - 1},$$
$$(b)\ \frac{z^3 - 4z^2 - 11z - 6}{z+1}, \qquad (d)\ \frac{z^n - 1}{z - 1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

IV. Linearfaktoren

Zerlegen Sie die folgenden Polynomen in Linearfaktoren:

$$(a)\ P(z) = z^2 - z - 1, \qquad (c)\ P(z) = z^3 - (5+i)z^2 + (2+5i)\,z - 10,$$
$$(b)\ P(z) = z^3 - 3z - 2, \qquad (d)\ P(z) = z^4 - 8z^3 + 24z^2 - 32z + 16$$

V. Konforme abbildung.

(a) Für welche $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, mit $c \neq 0$, ist die Funktion

$$f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \quad z \to \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d} & \text{falls } z \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}, \\ \dfrac{a}{c} & \text{falls } z = \infty, \\ \infty & \text{falls } z = \dfrac{-d}{c}. \end{cases}$$

bijektiv?

(b) Folgern Sie daraus, dass die Inversion

$$f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \quad z \to \begin{cases} \dfrac{1}{z} & \text{falls } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; \\ 0 & \text{falls } z = \infty, \\ \infty & \text{falls } z = 0. \end{cases}$$

Geraden und Kreise auf Geraden oder Kreise abbildet.

VI*. Allgemeine Potenzsummen Formular.

Betrachten Sie für $p \in \mathbb{N}$ die Potenzsummen

$$S_n^p = \sum_{k=1}^{n} k^p.$$

1. Beweisen Sie die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{p+1} \binom{p+1}{k} S_n^{p+1-k} = (n+1)^{p+1} - 1.$$

2. Schreiben Sie S_n^p für $p = 0, 1, 2, 3$ als Polynom in n.
3. Was ist in S_n^p (für allgemeines $p \in \mathbb{N}$) die höchste vorkommende Potenz in n und was ist ihr Koeffizient?

VII*. Körperaxiome.

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, d.h. eine Menge mit mindestens zwei Elementen $0_{\mathbb{K}} \neq \varepsilon$ und Operationen $+, \cdot$ die (K1)-(K4) erfüllt. Zeigen Sie unter Bewertung der Körperaxiome die folgenden Aussagen:

(a) $\exists N! \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathbb{K} : N + x = x$.

(b) $N = 0_{\mathbb{K}}$.

(c) $\exists!\, 1_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathbb{K},\ 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$.

(d) Die Lösungen zu den Gleichungen in (K3) sind eindeutig.

(e) $x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$.

Abgabe: Montag, den 9. Oktober 2017.