I. Abzählbare Menge

(a) Seien A, B abzählbare Mengen. Zeigen Sie, dass $A \cup B$ albzählbar ist.

(b) Seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbare Mengen. Zeigen Sie, dass $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ abzählbar ist.

II. Berechnen Sie durch Polynomdivision (mit Rest):

$$(a)\ \frac{4z^3 - 3z^2 - 49z - 36}{z+1}, \quad (c)\ \frac{2z^5 + 3z^4 - 21z^3 - 37z^2 - 9z + 6}{z^2 - 2z - 3},$$
$$(b)\ \frac{z^4 + z^3 - 9z^2 - 9z + 1}{z+3}, \quad (d)\ \frac{2z^5 - 17z^4 + 48z^3 - 51z^2 + 12z}{z^2 + 1}.$$

III. Schreiben Sie die Partialbruchzerlegung der folgenden rationalen Funktionen:

$$(a)\ \frac{1}{z(z+1)}, \qquad (c)\ \frac{2z+3}{(z^2+4z+4)(z-1)},$$
$$(b)\ \frac{z^4+1}{(z+3)(z-6)(z+5)}, \quad (d)\ \frac{3z^2+1}{(z^2+1)(z+2)(z-3)}.$$

IV. Drei komplexe Zahlen $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ bilden genau dann die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks, wenn

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$$

gilt.

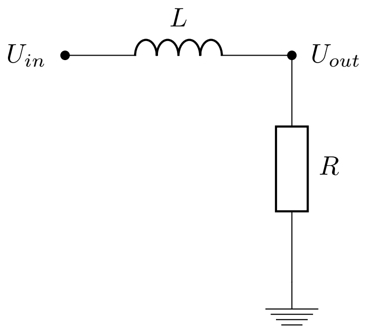
Hinweis: Zeigen Sie, dass die Gleichung invariant ist bezüglich Translationen und Drehstreckungen.

V.

1. (a) Berechnen Sie die Übertragunsfunktion

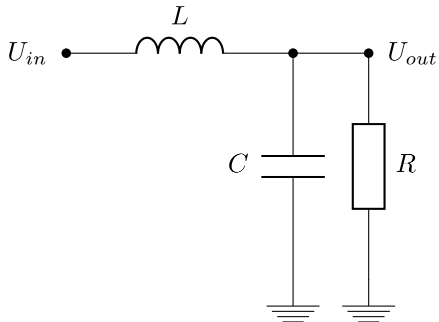
$$H(\omega) = \frac{U_{out}}{U_{in}}$$

des folgenden (sehr einfachen) Tiefpassfilters:



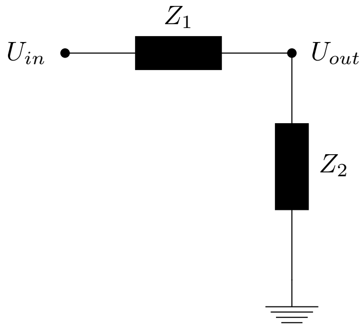
(b) Berechnen und skizzieren Sie den Frequenzgang, d.h. für uns $|H(\omega)|$, als Funktion von der Frequenz ω.

(c) $(*)$ Lösen Sie die gleiche Aufgabe für den etwas komplizierteren Filter



Hinweise:

- Im Spannungsteiler



gilt

$$\frac{U_{out}}{U_{in}} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

- Für die Parallelschaltung von Impedanzen Z_1, Z_2 gilt das Kirchhoffsche Gesetz

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

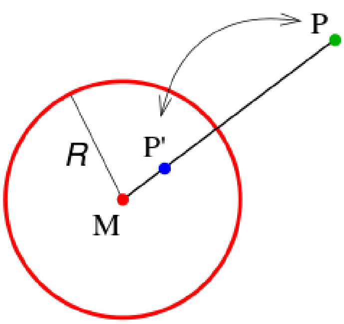
- Die Impedanzen von (idealen) Ohmschen Widerständen, Induktivitäten und Kapazitäten sind $Z = R$, $Z = i\omega L$ bzw. $Z = \frac{1}{i\omega C}$.

VI. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \setminus \{0\} &\to \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ z &\mapsto \frac{1}{z} \end{aligned}$$

geometrisch als Verknüpfung von einer Kreisspiegelung mit der komplexen Konjugation aufgefasst werden kann.

Hinweis: Die Kreisspiegelung eines Punktes im $\mathbb{R}^2$ ist geometrisch durch folgende Konstruktion beschrieben.



Abgabe: Montag, den 16. Oktober 2017.