I. Bestimmen sie die Pole der rationalen Funktion

$$R(z) = \frac{4z^3 - 4z^2 + z - 1}{(z^2-1)^2(z^2-4z+4)}$$

und deren Ordnung (d.h Vielfachheit). Bestimmen Sie auch die entsprechenden Hautteile und die Partialbruchzerlegung.

II. Sei R eine rationale Funktion. Zeigen Sie, dass die Partialbruchzerlegung von R

$$R(z) = \sum_k \sum_m \frac{a_{m,k}}{(z-\alpha_m)^k} + P(z)$$

durch R eindeutig bestimmt ist. Das heisst genauer: Nehmen Sie an R kann in obiger Form geschrieben werden mit (irgendwelchen) paarweise verschiedenen $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_m \in \mathbb{C}$, $a_{m,k} \in \mathbb{C}$ und $P(z) \in \mathbb{C}[z]$. Zeigen Sie, dass dann diese Koeffizienten mit denen der in der Vorlesung konstruierten Partialbruchzerlegung übereinstimmen.

III. Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten und bestimmen Sie gegebenfalls den Grenzwert der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$:

$(a)\ a_n = \frac{n^2+5n}{3n^2-2}$,

$(b)\ a_n = n(-1)^n$,

$(c)\ a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$,

$(d)\ a_n = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$,

$(e)\ a_n = \left(\frac{3+4i}{5}\right)^n$,

$(f)\ a_n = \sqrt[n]{3^n + 4^n + 5^n}$,

$(g)\ a_n = \sqrt[n]{7n^6 + 2n^2 + 1}$,

$(h)\ a_n = \frac{2^n - n^{2017}}{2^n + n^{2017}}$.

IV. Zeigen Sie, dass jede *Nullfolge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \neq 0$, die Gleichung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+a_n} - 1}{a_n} = \frac{1}{2}$$

erfüllt.

V. (a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Beweisen Sie, dass die Folge der arithmetische Mittel

$$s_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

ebenfalls gegen a konvergiert.

(b) Geben Sie ein Beispiel einer divergenten Folge, deren arithmetisches Mittel konvergiert.

VI. ($*$) Reelle Partialbruchzerlegung Der Satz von der reellen Partialbruchzerlegung besagt, dass man jede reelle rationale Funktion $R(x)$ schreiben kann als Linearkombination von Ausdrücken der folgenden Form

1. $x^n, n \in \mathbb{N}_0$,
2. $\frac{1}{x-a}$, $a \in \mathbb{R}$,
3. $\frac{ax+b}{Q(x)}$, $a, b \in \mathbb{R}$, wobei $Q(x)$ ein reelles quadratisches Polynom ohne reelle Nullstellen ist.

(a) Finden Sie die reelle Partialbruchzerlegung der Funktion

$$R(x) = \frac{x^2+1}{x^4+1}$$

und vergleichen Sie diese mit der komplexen Partialbruchzerlegung.

(b) ($*$) Beweisen Sie den obigen Satz von der reellen Partialbruchzerlegung. Beginnen Sie dazu mit der komplexen Partialbruchzerlegung und fassen Sie die Hauptteile zu komplex konjugierten Polen geeignet zusammen.

Abgabe: Montag, den 23. Oktober 2017.